普通高等学校工科类·经管类数学深化训练与考研辅导丛书

高等数学
深化训练与考研指导

刘　强　丛书主编

袁安锋　刘　强　窦昌胜　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是作者在多年本科教学和考研辅导经验的基础上编写而成的．全书共分为 11 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练．本书编写的主要目的有两个：一是为了满足学生报考研究生的需要，本书编写紧扣“数学一”考研大纲，贴切考试实际，做到分门别类、详略得当，帮助考研学生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，提高综合分析问题、解决问题的能力，以达到融会贯通、举一反三的学习效果；二是帮助学有余力的在校本科生更好地学习“高等数学”课程，开阔学习视野，拓展解题思路．

本书既可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书，也可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“高等数学”课程的深化训练用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学深化训练与考研指导 / 袁安锋，刘强，窦昌胜编著. —北京：电子工业出版社，2017.5

ISBN 978-7-121-31148-2

I．①高…　II．①袁…　②刘…　③窦…　III．①高等数学－高等学校－教学参考资料　IV．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 057522 号

策划编辑：王二华
责任编辑：王二华
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：22.75　字数：580 千字
版　　次：2017 年 5 月第 1 版
印　　次：2017 年 5 月第 1 次印刷
定　　价：49.90 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：(010)88254532。

前　　言

为了更好地帮助普通高等学校工科类、经管类本科生学好大学数学，同时为了满足众多考生考研的需要，我们结合多年的考研辅导经验，编写了“普通高等学校工科类·经管类数学深化训练与考研辅导丛书”．该丛书包括微积分、高等数学、线性代数、概率论与数理统计及大学生数学竞赛课程的训练辅导用书，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书主编．

本书涵盖了考研“数学一”中高等数学部分的全部考点．本书编写的主要目的有两个：一是帮助学有余力的在校学生更好地学习“高等数学”课程，以开阔学习视野，拓展解题思路；二是为了满足学生报考研究生的需要，本书编写紧扣考研大纲，贴切考试实际，做到分门别类、详略得当，使考生能在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，综合分析问题、解决问题的能力得到有效提升，达到融会贯通、举一反三的学习效果．

全书共分为 11 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练．具体模块内容介绍如下．

一、**知识要点**：本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理，方便读者查阅相关内容．

二、典型例题分析：本模块在作者多年考研辅导经验的基础上，创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目，汇集了一些有代表性的考研真题，按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧．

三、深化训练：本模块精心选编了部分具有代表性的习题及历年的考研真题，帮助读者巩固强化所学知识，提升读者学习效果，做到融会贯通和举一反三．

四、深化训练详解：本部分对深化训练部分给出了详细的解答过程，部分习题给出多种解法，以开拓读者的解题思路，培养读者的分析能力和发散思维．

五、综合提高训练：本部分的例题综合性较强，有较高的难度和较强的灵活性，通过本模块的学习，提升读者的综合能力和应变能力．

为了便于读者阅读本书，书中有一定难度的结论、例题和综合练习题等将用“**”标出．另外为了便于读者查阅，本书在考研真题后面加上了标志，如【2010（1）】表示该题是 2010 年硕士研究生入学考试“数学一”考题，【2010（1，3）】表示该题是 2010 年“数学一”和“数学三”考题，其余类推．

本丛书在编写过程中，得到了北京工业大学程维虎教授、李高荣教授，北京工商大学曹显兵教授，北方工业大学刘喜波教授，首都经济贸易大学张宝学教授、马立平教授、任韬副教授，昆明理工大学吴刘仓教授，北京化工大学李志强副教授，中央财经大学贾尚晖教授及同事的大力支持，电子工业出版社高教分社的谭海平社长和王二华编辑也为丛书的出版付出了很多的努力，在此表示诚挚的感谢．

本书既可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书，也可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“高等数学”课程的深化训练用书.

由于作者水平有限，尽管付出了很大努力，但书中仍可能存在不妥甚至错误之处，恳请读者和同行们不吝指正．邮件地址为：cuebliuqiang@163.com.

作　者

2017 年 4 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

1.1　知 识 要 点

1.1.1　映射与函数

1．映射

设 X 和 Y 是两个非空集合，如果存在一个对应法则 f，使得对 X 中的每个元素 x，按照法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**，记作：$f:X\to Y$，并称 y 为元素 x 在映射 f 下的**像**，记作 $y=f(x)$，x 称为元素 y 的一个**原像**，集合 X 称为映射 f 的**定义域**，也记为 D_f，X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的**值域**，通常记为 $Z(f)$，即 $Z(f)=\{y\,|\,y=f(x),x\in X\}$．

从映射的定义可以看到，映射 f 的值域是集合 Y 的一个子集，即 $Z(f)\subseteq Y$．

如果 $Z(f)=Y$，则称 f 为从 X 到 Y 的**满射**；若对 X 中的任意两个不同的元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为从 X 到 Y 的**单射**；若 f 既是满射又是单射，则称 f 为**一一映射**（或**双射**）.

映射又称为**算子**，根据集合 X 与 Y 的不同情形，映射有不同的习惯称谓，如从非空集合 X 到数集 Y 的映射称为**泛函**，从非空数集 X 到它自身的映射称为**变换**，从实数集 X 到实数集 Y 的映射又称为**函数**.

2．函数

设 D 为一个非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都能由 f 唯一确定一个实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个**函数**，记作 $y=f(x)$，其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，实数集 D 称为函数的**定义域**，也可记为 $D(f)$ 或者 D_f．集合 $\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}$ 称为函数的**值域**，一般记为 $Z(f)$ 或者 Z_f．

定义域和**对应法则**是函数的两要素，值域由定义域和对应法则确定.

1.1.2　函数的基本特性

函数的基本特性主要有四种，即奇偶性、单调性、周期性和有界性.

1．奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 上关于原点对称，如果对于 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

奇函数的图像关于坐标原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称．需要注意的是：函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，因此如果函数的定义域关于原点不对称，则该函数不具有奇偶性.

奇、偶函数的一些常用结论：

（1）常函数为偶函数；

（2）有限个奇函数的代数和为奇函数，有限个偶函数的代数和为偶函数；

（3）奇函数与偶函数的乘积为奇函数；

（4）奇数个奇函数的乘积为奇函数，偶数个奇函数的乘积为偶函数.

2．单调性

设函数 $f(x)$ 在某个区间 D 上有定义，对于 $\forall x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$，有

（1）若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调增加（单调递增）；

（2）若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调减少（单调递减）.

3．周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对任意一个 $x \in D$，有 $x \pm T \in D$，且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立，则称该函数为**周期函数**．T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**，满足上式的最小的正数 T_0 称为函数的**最小正周期**，通常我们所说的函数的周期指的是函数的最小正周期.

周期函数的一些常用结论：

（1）若 $f(x)$ 的周期为 T，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}(a \neq 0)$；

（2）若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期均为 T，则 $f(x) \pm g(x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

4．有界性

定义 1　设函数 $f(x)$ 在集合 $f(x)$ 上有定义，若存在正数 M，使得对于 $\forall x \in D$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**，否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

定义 2　若存在实数 a 和 b，使得对 $\forall x \in D$，恒有 $a \leqslant f(x) \leqslant b$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**，其中 a 称为函数的**下界**，b 称为函数的**上界**.

1.1.3　反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 Z_f．如果对于 Z_f 中的每一个 y 值，都存在唯一的满足 $y = f(x)$ 的 $x \in D_f$ 与之对应，这样确定的以 y 为自变量、以 x 为因变量的函数，称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，并记为 $x = f^{-1}(y)$．习惯上，一般将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$．

显然，反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域为 Z_f，值域为 D_f，且对任意的 $y \in Z_f$，有

$$f[f^{-1}(y)] = y,$$

对任意的 $x \in D_f$，有

$$f^{-1}[f(x)] = x.$$

单调函数一定存在反函数，且函数与反函数具有相同的单调性.

在同一坐标系下，函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图像是重合的，$y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

1.1.4　复合函数

已知两个函数

$$y = f(u)\,,\quad u \in D_f\,,\quad y \in Z_f\,,$$

$$u = g(x)\,,\quad x \in D_g\,,\quad u \in Z_g\,,$$

若 $D_f \cap Z_g \neq \varnothing$，则可通过中间变量 u 将 $u = g(x)$ 代入 $y = f(u)$ 构成一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数 $y = f[g(x)]$，称 $y = f[g(x)]$ 为 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的**复合函数**.

1.1.5　基本初等函数与初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数共 6 大类函数统称为**基本初等函数**.

由基本初等函数经有限次四则运算和（或）复合运算而得到的函数称为**初等函数**.

几个常见的结论：

（1）$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}\ (|x| \leqslant 1)$；

（2）$\arctan x + \operatorname{arc}\cot x = \dfrac{\pi}{2}$；

（3）$\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}\ (x \neq 0)$.

1.1.6　极限的概念与性质

1．数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$ 成立.

注　在数列极限的定义中，一方面，$\varepsilon > 0$ 要多小就可以多小，或者说可以任意的小；另一方面，ε 一旦给定，若存在一个正整数 N_0，使得当 $n > N_0$ 时，恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$ 成立，则对任意一个大于 N_0 的正整数，都可以作为定义中的 N，即 N 与 ε 有关，但不唯一.

2．$x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

设有函数 $y = f(x)$ 和常数 A，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，若存在 $M > 0$，使当 $|x| > M$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，则称当 $x \to \infty$ 时，$y = f(x)$ 的**极限**为 A，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to \infty)\,.$$

类似地可以定义 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

3．$x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

设有函数 $y = f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的**极限**为 A，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

类似地可以定义右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 和左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

4．极限的性质

（1）**唯一性**　若极限 $\lim Y$ 存在，则极限值唯一.

（2）**有界性**　如果 $\lim Y$ 存在，则 Y 是局部有界的．特别地，若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在，则 $\{u_n\}$ 不仅是局部有界的，而且是全局有界的.

（3）**保号性**　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$）则 $f(x)$ 在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

（4）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则有 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

（5）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant g(x)$ [或 $f(x)\leqslant g(x)$]，则有 $A\geqslant B$（或 $A\leqslant B$）.

注　这里的变量 Y 既可以表示数列，也可以表示函数，下同.

1.1.7　无穷小与无穷大

1．无穷小的概念及其性质

以 0 为极限的变量称为**无穷小**（或**无穷小量**）．需要注意的是，0 是一种特殊的无穷小．无穷小有如下性质：

（1）有限个无穷小的和是无穷小；

（2）有界变量与无穷小的乘积是无穷小；

（3）$\lim Y=A \Leftrightarrow Y=A+\alpha$，其中 α 是无穷小（与 Y 同在一个变化过程中）.

2．无穷小的阶

设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小，则：

（1）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶的无穷小**（或 α 是比 β **低阶的无穷小**），记作 $\beta=o(\alpha)$.

（2）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 是与 α **同阶的无穷小**，记作 $\beta=O(\alpha)$．特殊地，当 $c=1$ 时，称 β 与 α 是**等价的无穷小**，记作 $\alpha\sim\beta$.

（3）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，$k>0$，则称 β 是关于 α 的 k **阶的无穷小**，记作 $\beta=O(\alpha^k)$.

3．等价无穷小的性质

性质 1　设 α、β、γ 是同一变化过程中的无穷小，则：

（1）若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$；

（2）若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$.

性质 2　设α、β、$\bar{\alpha}$和$\bar{\beta}$是同一变化过程中的无穷小，且$\alpha\sim\bar{\alpha}$，$\beta\sim\bar{\beta}$，$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$存在，则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\bar{\alpha}}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha}{\bar{\beta}}=\lim\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$.

4．无穷大的概念

如果在某个变化过程中，对于$\forall\ M>0$，存在某个时刻，使得在那个时刻以后恒有$|Y|>M$成立，则称变量Y为**无穷大**（或**无穷大量**）．记作$\lim Y=\infty$或$Y\to\infty$.

注　由于从本质上来讲，在相应的变化趋势下，无穷大的极限是不存在的，常用的极限运算法则不适用，因此无穷大的问题往往转化为无穷小来讨论.

5．无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一个的变化趋势下，无穷小与无穷大有如下关系：若变量Y为无穷大，则$\dfrac{1}{Y}$为无穷小；若变量Y为无穷小（$Y\neq 0$），则$\dfrac{1}{Y}$为无穷大.

1.1.8　极限的运算法则

1．极限的四则运算法则

设极限$\lim X$，$\lim Y$均存在，则：

（1）$\lim(X\pm Y)$存在，且$\lim(X\pm Y)=\lim X\pm\lim Y$；

（2）$\lim(X\cdot Y)$存在，且$\lim(X\cdot Y)=\lim X\cdot\lim Y$；

（3）若$\lim Y\neq 0$，则$\lim\dfrac{X}{Y}$存在，且有$\lim\dfrac{X}{Y}=\dfrac{\lim X}{\lim Y}$.

推论 1　若$\lim X$存在，C为一常数，则$\lim(CX)$存在，且$\lim(C\cdot X)=C\cdot\lim X$.

推论 2　若$\lim X$存在，k为一正整数，则$\lim X^k$存在，且$\lim(X^k)=(\lim X)^k$.

2．复合函数的极限运算法则

设函数$y=f[g(x)]$是由函数$u=g(x)$与函数$y=f(u)$复合而成的，$y=f[g(x)]$在点x_0的某个去心邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且$g(x)$在$x_0$的某个去心邻域满足$g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

1.1.9　极限存在准则与两个重要极限

1．夹逼定理

如果变量X,Y,Z满足$X\leqslant Y\leqslant Z$，且$\lim X=\lim Z=A$（A为某常数），那么$\lim Y$也存在且$\lim Y=A$.

2．单调有界准则

（1）若数列u_n单调且有界，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$一定存在.

（2）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调且有界，则左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 一定存在.

注 对于自变量不同的变化过程（$x\to x_0^+$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$），都有相应的单调有界准则.

（3）（柯西（Cauchy）收敛准则）数列 $\{u_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $m>N$，$n>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

3．数列与子数列的关系

从数列 $\{u_n\}$ 中抽取无穷多项，在不改变原有次序的情况下构成的新数列称为数列 $\{u_n\}$ 的**子数列**，简称**子列**．记作 $\{u_{n_k}\}$：$u_{n_1},u_{n_2},\cdots,u_{n_k},\cdots$．其中 n_k 表示 u_{n_k} 在原数列 $\{u_n\}$ 中的位置，k 表示 u_{n_k} 在子列中的位置.

数列 $\{u_n\}$ 与子数列 $\{u_{n_k}\}$ 之间的关系如下.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A \Leftrightarrow$ 对 $\{u_n\}$ 的任何子数列 $\{u_{n_k}\}$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A \Leftrightarrow$ 偶数子列 $\{u_{2k}\}$ 和奇数子列 $\{u_{2k+1}\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k+1}=A$.

（3）当 $\{u_n\}$ 是单调数列时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A \Leftrightarrow$ 存在某个子数列 $\{u_{n_k}\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$.

4．海涅（Heine）定理

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow$ 对任何数列 $\{x_n\}$，$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，且 $x_n\neq x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

注 海涅定理给出了数列极限与函数极限之间的关系.

5．两个重要公式

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$．该极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 类型的未定式．它可以推广到 $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或者 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$．该极限属于 1^∞ 类型的未定式．它可以推广到 $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$.

1.1.10 函数的连续性

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的三个等价定义为：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；

（2）$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，其中 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

（3）$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立.

$y=f(x)$ 在某个区间内连续的定义：

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处都连续，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续；如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续且在 a 处右连续，则称 $y=f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续．类似也可以定义 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 和 $[a,b]$ 上的连续性.

1.1.11 函数的间断点

1．间断点的定义

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处出现如下三种情况之一，则称 x_0 为 $y=f(x)$ 的间断点：

（1）$y=f(x)$ 在点 x_0 处无定义；

（2）$y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）$y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

2．间断点的类型

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**，其中：

（1）**可去间断点** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ；

（2）**跳跃间断点** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

特殊地，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个为 ∞ ，则称 x_0 为**无穷间断点**．如 $x=0$ 是 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

1.1.12　连续函数的性质

1．连续函数的四则运算

若函数 $f(x)$ ，$g(x)$ 都在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$ ，$f(x)g(x)$ ，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x_0)\neq 0\right)$ 在点 x_0 处也连续.

2．复合函数的连续性

若 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，$u=g(x)$ 在点 x_0 处连续且 $u_0=g(x_0)$ ，则 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续.

3．反函数的连续性

若 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调、连续，则其反函数在相应的定义区间上单调、连续.

4．初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内都是连续的，所谓的定义区间指的是包含在定义域内的区间.

1.1.13　闭区间上的连续函数的性质

1．有界性定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 一定在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists\, M>0$ ，对于 $\forall x\in[a,b]$ ，都有 $|f(x)|\leqslant M$.

2．最值定理

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最大值和最小值.

3．介值定理

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，且 $M>m$，则对介于 m 与 M 之间的任一数 C，即 $m<C<M$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=C$.

注　定理中的条件如果改为 $m\leqslant C\leqslant M$，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=C$.

4．零点存在定理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

1.1.14　一些重要的结论

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0 & |a|<1\\ 1 & a=1\\ \text{不存在} & \text{其他}\end{cases}$.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$，其中 $a_n\neq0, b_m\neq0$.

1.1.15　一些常用的公式

1．倍角公式

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$；

$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$；

$\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

2．半角公式

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$；　　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$.

3．某些级数的部分和

$1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$；

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$；

$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

4．乘法与因式分解公式

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$；

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$；

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$；

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$，其中 n 为正整数；

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$，

其中 $C_n^0=1, C_n^k=\frac{P_n^k}{P_k^k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

5．对数公式

$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$； $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$；

$\log_a x^b=b\log_a x$； $\log_a x=\frac{\log_c x}{\log_c a}$； $a^{\log_a x}=x$.

其中 $a>0$， $a\neq1$， $c>0$， $c\neq1$， $x>0$， $y>0$.

6．常见的等价无穷小公式

当 $x\to0$ 时，有：

（1） $\sin x\sim x$；

（2） $\arcsin x\sim x$；

（3） $\tan x\sim x$；

（4） $\arctan x\sim x$；

（5） $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；

（6） $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$；

（7） $\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}\ (a>0,a\neq1)$；

（8） $\ln(1+x)\sim x$；

（9） $a^x-1\sim x\ln a\ (a>0,a\neq1)$；

（10） $e^x-1\sim x$；

（11） $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$；

（12） $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$；

（13） $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$.

1.2　典型例题分析

1.2.1　题型一、函数定义域的求解

例 1.2.1　求函数 $y=\frac{1}{\arcsin x}-\sqrt{3x+1}$ 的定义域.

解　由题意，$|x|\leqslant 1$，$x\neq 0$，且 $3x+1\geqslant 0$，解不等式得 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$，且 $x\neq 0$．所以函数的定义域为

$$D_f=\left[-\frac{1}{3},0\right)\cup(0,1].$$

例 1.2.2　已知

$$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & -1\leqslant x\leqslant 1\\ \ln(x^2+1) & 1<|x|<2\end{cases},$$

试求函数 $f(x-1)$ 的定义域.

解　由题意可知，$f(x)$ 的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 与 $1<|x|<2$ 的并集，因此 $f(x)$ 的定义域为 $-2<x<2$，故 $f(x-1)$ 的定义域为 $-2<x-1<2$，即 $-1<x<3$.

例 1.2.3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,6]$，求 $g(x)=f(x+2)+\ln(2x+1)$ 的定义域.

解　由于 $f(x)$ 的定义域为 $[0,6]$，因此 $f(x+2)$ 的定义域为 $0\leqslant x+2\leqslant 6$，即 $x\in[-2,4]$；又因为 $2x+1>0$，因此 $x>-\dfrac{1}{2}$；所以 $g(x)$ 的定义域为 $D_f=\left(-\dfrac{1}{2},4\right]$.

1.2.2　题型二、函数表达式的求解

例 1.2.4　已知 $f\left(\dfrac{1}{x}-x\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$，$x\neq 0$，试求 $f(x)$ 的表达式.

解　由于

$$f\left(\frac{1}{x}-x\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2=\left(\frac{1}{x}-x\right)^2+4,$$

令 $t=\dfrac{1}{x}-x$，则 $f(t)=t^2+4$，从而 $f(x)=x^2+4$.

例 1.2.5　设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x+x^2}$，其中 $x<0$，试求 $xf(x)$.

解　令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{t}$，从而

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}},$$

故

$$xf(x)=x\cdot\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=1-\sqrt{x^2+x+1}.$$

例 1.2.6　已知 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=2f(x)+3x+1$，且 $x\neq -1$，试求 $f(x)$.

解　令 $t=\dfrac{x+1}{x-1}$，则 $x=\dfrac{t+1}{t-1}$，从而

$$f(t)=2f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)+3\cdot\frac{t+1}{t-1}+1,$$

联立方程得

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=2f(x)+3x+1 \\ f(x)=2f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+3\cdot\dfrac{x+1}{x-1}+1 \end{cases},$$

解得

$$f(x)=-\frac{x+1}{x-1}-2x-1.$$

1.2.3　题型三、反函数的求解

例 1.2.7　求函数 $y=\begin{cases} x^2-1 & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ \ln(x+1) & x>0 \end{cases}$ 的反函数.

解　当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=x^2-1$，从而 $x=-\sqrt{y+1}$，$-1\leqslant y\leqslant 0$；当 $x>0$ 时，$y=\ln(x+1)$，$x=\mathrm{e}^y-1$，$y>0$．因此反函数为

$$y=\begin{cases} -\sqrt{x+1} & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ \mathrm{e}^x-1 & x>0 \end{cases}.$$

例 1.2.8　求函数 $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}+2$ 的反函数.

解　令 $2^x=t$，则 $2^{-x}=\dfrac{1}{t}$，因此有

$$(y-2)t+(y-2)\cdot\frac{1}{t}=t-\frac{1}{t},$$

整理得 $t^2=\dfrac{1-y}{y+3}$，从而 $t=\sqrt{\dfrac{1-y}{y+3}}$，即 $2^x=\sqrt{\dfrac{1-y}{y+3}}$，解得

$$x=\log_2\sqrt{\frac{1-y}{y+3}}=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-y}{y+3}\right),$$

因此反函数为

$$y=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-x}{x+3}\right),\quad x\in(-3,1).$$

1.2.4　题型四、复合函数的求解

例 1.2.9　设 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解

$$f[f(x)]=1-\frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x-1},$$

$$f\{f[f(x)]\}=1-\frac{1}{f[f(x)]}=1-\frac{1}{-\frac{1}{x-1}}=x .$$

例 1.2.10　设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x<0\\ 0 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

解　由题意，

$$f[f(x)]=\begin{cases}f^2(x)-1 & f(x)<0\\ 0 & f(x)\geqslant 0\end{cases}.$$

（1）由 $f(x)<0$，有 $f(x)=x^2-1<0$，且 $x<0$，从而 $-1<x<0$.

（2）由 $f(x)\geqslant 0$，有

$$\begin{cases}f(x)=x^2-1\geqslant 0\\ x<0\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}f(x)=0\geqslant 0\\ x\geqslant 0\end{cases},$$

解得 $x\leqslant -1$ 或者 $x\geqslant 0$. 因此

$$f[f(x)]=\begin{cases}(x^2-1)^2-1 & -1<x<0\\ 0 & x\leqslant -1或x\geqslant 0\end{cases}.$$

例 1.2.11　$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & x<1\\ x & x\geqslant 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x+3 & x<0\\ x-2 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

解　由题意，$f[g(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{g(x)} & g(x)<1\\ g(x) & g(x)\geqslant 1\end{cases}$，下面进行分类讨论.

（1）当 $g(x)<1$ 时，则

$$\begin{cases}g(x)=x+3<1\\ x<0\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}g(x)=x-2<1\\ x\geqslant 0\end{cases},$$

从而有 $x<-2$ 或 $0\leqslant x<3$.

（2）当 $g(x)\geqslant 1$ 时，则

$$\begin{cases}g(x)=x+3\geqslant 1\\ x<0\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}g(x)=x-2\geqslant 1\\ x\geqslant 0\end{cases},$$

从而有 $-2\leqslant x<0$ 或 $x\geqslant 3$.

综上所述，有

$$f[g(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{x+3} & x<-2\\ x+3 & -2\leqslant x<0\\ \mathrm{e}^{x-2} & 0\leqslant x<3\\ x-2 & x\geqslant 3\end{cases}.$$

1.2.5　题型五、函数的基本特性

例 1.2.12　设 $f(x)=|x\sin x|\cdot\mathrm{e}^{\cos x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是（　　）.

（A）有界函数；　（B）单调函数；　（C）奇函数；　（D）偶函数.

解　假设 $f(x)$ 为有界函数，则存在 $M>0$，使得对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|f(x)|<M,$$

若取 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，n 为正整数，则有

$$|f(x)|=2n\pi+\frac{\pi}{2}<M,$$

显然当 n 足够大时，上式不成立，因此假设不成立，故 $f(x)$ 为无界函数，选项（A）错误；

由于 $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，$f(\pi)=0$，即有 $f(0)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$，因此 $f(x)$ 不具有单调性，故选项（B）错误；

由于 $f(-x)=|x\sin x|\cdot e^{\cos x}=f(x)$，因此 $f(x)$ 为偶函数，故选项（D）正确.

例 1.2.13　设 $f(x)=\begin{cases}2^x+1 & x<1\\ 2x-1 & x>1\end{cases}$，试讨论函数 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 的奇偶性.

解　由题意，函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\in R,x\neq 1,x\neq -1\}$，定义域关于原点对称，又因为

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]\ =-g(x),$$

因此函数 $g(x)$ 为奇函数.

注　类似方法可以证明函数 $\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 为偶函数，且奇偶性与函数 $f(x)$ 的具体表达式没有关系.

例 1.2.14　设对于 $\forall x\in R$ 有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，试求 $f(x)$ 的周期.

解　由题意可知，对于任意的 $x\in R$ 有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\geqslant\dfrac{1}{2}$，从而对于任意的 $x\in R$ 有 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$.

又因为

$$f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)},$$

因此有

$$f(x+1)=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x),$$

故 $f(x)$ 的周期为 1.

例 1.2.15　试证明：若函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图像关于直线 $x=1$ 和 $x=2$ 对称，则 $f(x)$ 必为周期函数.

证　因为 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 和 $x=2$ 对称，因此对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(1+x)=f(1-x),\quad f(2+x)=f(2-x),$$

所以

$$f(x)=f[1+(x-1)]=f[1-(x-1)]=f(2-x)=f(x+2),$$

即对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)=f(x+2)$，因此 $f(x)$ 为周期函数，周期 $T=2$.

1.2.6　题型六、极限的概念与性质问题

例 1.2.16　【2014（3）】设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时，有（　　）.

（A）$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$；　（B）$|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$；　（C）$a_n>a-\dfrac{1}{n}$；　（D）$a_n<a+\dfrac{1}{n}$.

解　正确答案为（A）. 根据数列极限的定义，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 由于

$$|a|-|a_n|\leqslant\big||a_n|-|a|\big|\leqslant|a_n-a|<\varepsilon,$$

从而有 $|a_n|>|a|-\varepsilon$，取 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$，则 $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$，故选项（A）正确.

若取 $a_n=a-\dfrac{1}{n}$ 或 $a_n=a+\dfrac{1}{n}$，显然满足题设条件，因此选项（C）和选项（D）错误.

例 1.2.17　【2003（1）】设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有（　　）.

（A）$a_n<b_n$ 对任意 n 成立；　（B）$b_n<c_n$ 对任意 n 成立；

（C）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在；　（D）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

解　正确答案为（D）. 若取 $a_n=\dfrac{10}{n}$，$b_n=1$，$c_n=\dfrac{n}{10}$，显然选项（A）、（B）、（C）均错误. 利用极限的性质可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$，故选项（D）正确.

例 1.2.18　已知 $f(x)=x^3+\dfrac{\sin x}{x}+2\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\lim\limits_{x\to0}f(x)$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　令 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$，则 $f(x)=x^3+\dfrac{\sin x}{x}+2A\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，从而

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x^3+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to0}2A\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

即有 $A=1+2A\cdot(-1)$，$A=\dfrac{1}{3}$，因此有

$$f(x)=x^3+\frac{\sin x}{x}+\frac{2}{3}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

例 1.2.19　【2013（3）】当 $x\to0$ 时，用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是（　　）.

（A）$x\cdot o(x^2)=o(x^3)$；　（B）$o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$；

（C）$o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$；　（D）$o(x)+o(x^2)=o(x^2)$.

解　根据高阶无穷小量的定义，若选项（D）成立，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=0\,.$$

事实上，

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{o(x)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}\,,$$

当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{o(x)}{x}$ 为无穷小量，而 $\dfrac{1}{x}$ 为无穷大量，因此极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$ 不一定存在．例如，取 $o(x)=x^2$，$o(x)=x^3$，$o(x)=x^{\frac{3}{2}}$ 等，上述极限结果均不相同，故选项（D）错误．

1.2.7　题型七、利用极限的四则运算法则求极限

例 1.2.20　求极限 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+5}-2x+2}{\sqrt{x^2+\sin x+1}}$．

解法 1　本题属于 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 类型，分子、分母同时除以 x（注意 x 为负值），有

$$原式=\lim_{x\to -\infty}\frac{-\sqrt{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-2+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{-2-2}{-1}=4\,.$$

解法 2　该类型问题常用的方法是作替换 $t=-x$，$x\to -\infty$ 时，$t\to +\infty$，从而

$$原式=\lim_{t\to +\infty}\frac{\sqrt{4t^2+2t+5}+2t+2}{\sqrt{t^2-\sin t+1}}=\lim_{t\to +\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{2}{t}+\dfrac{5}{t^2}}+2+\dfrac{2}{t}}{\sqrt{1-\dfrac{\sin t}{t^2}+\dfrac{1}{t^2}}}=\frac{2+2}{1}=4\,.$$

例 1.2.21　求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$．

解　本题属于 $\infty-\infty$ 类型，进行分子有理化，有

$$原式=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-(x+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}=0\,.$$

例 1.2.22　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n+5)^{10}(3n-1)^5}{(2n+3)^{15}}$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(4n+5)^{10}}{n^{10}}\cdot\dfrac{(3n-1)^5}{n^5}}{\dfrac{(2n+3)^{15}}{n^{15}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(4+\dfrac{5}{n}\right)^{10}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^5}{\left(2+\dfrac{3}{n}\right)^{15}}=\dfrac{4^{10}\cdot 3^5}{2^{15}}=6^5$.

例 1.2.23　设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{1+2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　由于

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

因此，当 $n\geqslant 3$ 时，

$$x_n=1+\frac{1}{1+1}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+\frac{1}{1+1}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\dfrac{1}{1+1}+1=\dfrac{5}{2}$.

1.2.8　题型八、利用单侧极限的性质求极限

例 1.2.24　【2000（1）】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解　由于

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

由于左右极限均存在且相等，因此原式$=1$.

例 1.2.25　设

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}-1 & x<1 \\ \dfrac{\ln(2-x)}{x-1} & x\geqslant 1 \end{cases},$$

试求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解　$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的分段点，因此需要考察左、右极限，

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(e^{\frac{1}{x-1}}-1\right)=-1,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(2-x)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln[1+(1-x)]}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x-1}=-1,$$

由于 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-1$，故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

1.2.9　题型九、利用两个重要极限求极限

例 1.2.26　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(2nx)-\cos(nx)}{x^2}$，其中 n 为正整数.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[1-\cos(nx)]-[1-\cos(2nx)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(nx)}{x^2}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(2nx)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(nx)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}}{\frac{4}{n^2}\cdot\left(\frac{nx}{2}\right)^2}-\lim_{x\to0}\frac{2n^2\sin^2(nx)}{(nx)^2}$$

$$=\frac{n^2}{2}-2n^2=-\frac{3}{2}n^2.$$

例 1.2.27　【2003（1）】求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

解　利用第二个重要极限，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}},$$

又因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

所以原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

1.2.10　题型十、利用等价无穷小量替换求极限

例 1.2.28　【2002（3）】设 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$________.

解　利用等价无穷小量替换公式 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to0)$，于是

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

例 1.2.29　【2004（2）】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解　由于当 $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，因此

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

例 1.2.30　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 a,b,c 均为正数.

分析　本题属于 1^∞ 类型，常用的方法有两种：一是利用第二个重要极限进行求解；二是利用对数恒等式，将表达式 $f(x)$ 转化为 $\mathrm{e}^{\ln f(x)}$ 的形式，再使用洛必达法则或等价无穷小量替换等方法进行求解（洛必达法则见第 3 章）.

解　利用对数恒等式，有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)\right\},$$

利用等价无穷小量替换，于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}\\&=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln b}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln c}{x}\right)\\&=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln(abc),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=\sqrt[3]{abc}.$$

1.2.11　题型十一、利用极限存在准则求极限

例 1.2.31　**【2008（1）】**设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（　　）.

（A）若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛；　　（B）若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛；

（C）若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛；　　（D）若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

解　若 $\{x_n\}$ 单调，由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，因此数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界，从而根据单调有界准则可知，数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛，从而选项（B）正确.

若取 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$，$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$，显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，数列 $\{x_n\}$ 收敛，但 $f(x_n)=\begin{cases}1 & n\text{为偶数}\\ -1 & n\text{为奇数}\end{cases}$，$\{f(x_n)\}$ 不收敛，选项（A）错误.

若取 $f(x)=\arctan x$，$x_n=n^2$，显然 $f(x_n)=\arctan n^2$ 单调、收敛，但数列 $\{x_n\}$ 发散，因此选项（C）、（D）错误.

例 1.2.32　【2006（1）】设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限．

解　由 $0<x_1<\pi$，可知 $x_2=\sin x_1\in(0,1)\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，于是对于 $\forall n\geqslant 2$，有 $x_n\in(0,1)$，故数列 $\{x_n\}$ 有界．又当 $x\geqslant 0$ 时，得 $\sin x\leqslant x$，所以 $x_{n+1}=\sin x_n\leqslant x_n$，即数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由极限的存在准则可知，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

不妨假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，等式 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边同时求极限得，$A=\sin A$，解得 $A=0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

例 1.2.33　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0$，$2x_{n+1}=x_n+\dfrac{4}{x_n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限值.

证　因为 $2x_{n+1}=x_n+\dfrac{4}{x_n}\geqslant 2\sqrt{x_n\cdot\dfrac{4}{x_n}}=4$，所以 $x_{n+1}\geqslant 2$，即数列 $\{x_n\}$ 有下界．又

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}x_n+\frac{2}{x_n}-x_n=\frac{2}{x_n}-\frac{1}{2}x_n=\frac{4-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0,$$

即有 $x_{n+1}\leqslant x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调收敛准则可知，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则等式 $2x_{n+1}=x_n+\dfrac{4}{x_n}$ 两边同时取极限，有 $2A=A+\dfrac{4}{A}$，因此 $A=\pm 2$，由保号性可知 $A\geqslant 2$，所以 $A=2$.

例 1.2.34　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$.

解　由于

$$4=(4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant 4^{\frac{1}{n}}\cdot 4,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}4\cdot 4^{\frac{1}{n}}=4$，由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=4 .$$

注　本例题的结论可以推广到一般情况，如求极限

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_K^n)^{\frac{1}{n}},$$

其中 K 为某个正整数，$a_i>0$，$i=1,\cdots,K$ ．则

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_K^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_K\} .$$

例 1.2.35　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x^n)^{\frac{1}{n}}$，其中 $x>0$.

解　利用例 1.2.34 的结论．当 $0<x<1$ 时，原式 $=1$；当 $x=1$ 时，原式 $=1$；当 $x>1$ 时，原式 $=x$ ．因此

$$原式=\begin{cases}1 & 0<x\leqslant 1\\ x & x>1\end{cases}.$$

例 1.2.36　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证　取两个子数列

$$\{x_n^{(1)}\}=\left\{\frac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right\} 和 \{x_n^{(2)}\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\},$$

显然满足

$$x_n^{(1)}\neq 0,\ \lim_{n\to\infty}x_n^{(1)}=0;\quad x_n^{(2)}\neq 0,\ \lim_{n\to\infty}x_n^{(2)}=0,$$

但是

$$\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=1,$$

$$\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=\sin(n\pi)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=0,$$

由海涅定理可知，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

1.2.12　题型十二、函数的连续性问题

例 1.2.37　讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的连续性.

解　当 $|x|<1$ 时，$f(x)=1+x$；当 $|x|=1$ 时，$f(x)=\dfrac{1+x}{2}$；当 $|x|>1$ 时，$f(x)=0$. 从而

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant -1\\ 1+x & -1<x<1\\ 1 & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=f(-1)=0$，所以 $x=-1$ 为函数 $f(x)$ 的连续点. 又因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$，$f(1)=1$，所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，综上函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 内连续.

例 1.2.38　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}} & x>0\\ a\mathrm{e}^{2x} & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值.

解　由于

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2,$$

而 $f(0)=a\mathrm{e}^0=a$，因此 $a=-2$.

例 1.2.39　求函数 $f(x)=\dfrac{\arctan x}{|x(x-1)|}$ 的间断点，并指出其类型.

解　显然 $x=0$ 和 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点. 因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x}{x(1-x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x(1-x)}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\arctan x}{x(x-1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x(x-1)}=-1,$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，因此 $x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点. 又因为

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x\cdot|x-1|}{\arctan x}=0,$$

因此 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，故 $x=1$ 是第二类间断点中的无穷间断点.

1.2.13　题型十三、连续函数的等式证明问题

例 1.2.40　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$f(0)=f(1)$，求证至少存在一点 $\xi\in[0,1]$，使得

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right).$$

证法 1　利用零点定理. 构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

则

$$\varphi(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right),\quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1).$$

若 $f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，则取 $\xi=\dfrac{1}{2}$，结论成立. 若 $f(0)\neq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，则 $\varphi(0)$ 和 $\varphi(1)$ 一定异号，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)\subset[0,1]$，使得 $\varphi(\xi)=0$，从而有

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right).$$

证法 2　利用介值定理. 构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

由题意可知，$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上连续，由闭区间上连续函数的最值定理可知，$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上一定能够取到最大值 M 和最小值 m，因此有 $2m\leqslant\varphi(0)+\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant 2M$，而

$$\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)=0,$$

因此有 $m \leqslant 0 \leqslant M$，由介值定理可知，至少存在一点 $\xi \in [0,1]$，使得 $\varphi(\xi)=0$，结论得证.

注　例 1.2.40 采用了两种方法，证法 1 的主要优势是能够在开区间 $(0,1)$ 内找到一点 ξ，使得结论成立，而证法 2 只能在闭区间 $[0,1]$ 上找到一点 ξ. 第二种方法的主要优势是便于推广.

例 1.2.41　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证对于任意正整数 n，必存在 $x_n \in [0,1]$，使得 $f(x_n)=f\left(x_n+\dfrac{1}{n}\right)$.

证　构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right),$$

由题意可知，$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right]$ 上连续，由闭区间上连续函数的最值定理可知，$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right]$ 上一定能够取到最大值 M 和最小值 m，于是有

$$m \leqslant \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant M,\ k=0,1,\cdots,n-1,$$

所以

$$m \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant M,$$

又因为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\left[f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1)\right]=0,$$

从而有 $m \leqslant 0 \leqslant M$，由介值定理可知，至少存在一点 $x_n \in \left[0,1-\dfrac{1}{n}\right] \subset [0,1]$，使得 $\varphi(x_n)=0$，即有 $f(x_n)=f\left(x_n+\dfrac{1}{n}\right)$.

1.3　深化训练

1.3.1　填空题

（1）已知 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ x-6 & 2<x\leqslant 3\end{cases}$，则 $f(x+1)=$________.

（2）设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，则 $f[f(x)]=$________，$f[f(x)]$ 的定义域为________.

（3）设对于任意的 $x\in R$，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，且 $f(4)=16$，则 $f(1)=$________.

（4）对于 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $|x-0|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{f(x)}{x}-1\right|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

（5）【2005（3）】$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$________.

（6）【2015（1）】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________.

（7）【2006（1）】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

（8）【2006（3）】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

（9） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^{n+1}}{2^n+5^{n+2}}=$________.

（10） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}=$________.

（11）已知 $f(x)=2x+4\sin x\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)$，则 $f(x)=$ ________.

（12） $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3nx}{1-nx}$ 的连续区间为________.

1.3.2　单项选择题

（1）【2004（3）】函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界（　　）.

（A） $(-1,0)$；　（B） $(0,1)$；　（C） $(1,2)$；　（D） $(2,3)$.

（2）若对任意的 x，均有 $f(x+2)=-f(x)$，则下列结论正确的是（　　）.

（A） $f(x)$ 不是周期函数；　（B） $f(x)$ 是周期函数，周期为 2；

（C） $f(x)$ 是周期函数，周期为 4；　（D）无法确定.

（3）函数 $y=x-\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是（　　）.

（A）周期函数；　（B）有界函数；　（C）奇函数；　（D）偶函数.

（4）【2015（3）】设 $\{x_n\}$ 是数列. 下列命题中不正确的是（　　）

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$；

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$；

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

（5）对 $\forall x$，总有 $\phi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[g(x)-\phi(x)\right]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$（　　）.

（A）存在且一定不等于零；　（B）存在但不一定为零；

（C）一定不存在；　（D）不一定存在.

（6）设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，则数列 $\{b_n\}$ 满足条件（　　）时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 存在.

（A） $\{b_n\}$ 有界；　（B） $\{b_n\}$ 单调；　（C） $\{b_n\}$ 单调有界；　（D）不能确定.

（7）【2007（1）】当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　　）.

（A） $1-e^{\sqrt{x}}$；　（B） $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$；　（C） $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$；　（D） $1-\cos\sqrt{x}$.

（8）设 $f(x)$，$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则下列结论正确的是（　　）.

（A） $\varphi[f(x)]$ 必有间断点；　（B） $\varphi[f^2(x)]$ 必有间断点；

（C） $f[\varphi(x)]$ 必有间断点；　　（D） $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

（9）下列说法正确的是（　　）.

（A）若 $f(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续；

（B）若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则必存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 内有界；

（C）若 $f(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 内有界且可导，则 $f'(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 内有界；

（D）若 $f(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 内有界，且有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$，则有 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

1.3.3　设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}+2$，求 $f(x)$ 的表达式.

1.3.4　求 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 的反函数.

1.3.5　试求函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & 1\leqslant x\leqslant 2 \\ x+6 & 2<x\leqslant 3 \end{cases}$ 的反函数.

1.3.6　设 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1-x$，且 $x\neq 0$，求 $f(x)$ 的表达式.

1.3.7　已知 $f(x)$ 是奇函数，判断 $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$ 的奇偶性.

1.3.8　已知 $\cot\alpha=b$，其中 $\alpha\in(\pi, 2\pi)$，试用反三角函数表示 α.

1.3.9　求解下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$；　　（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{1-\cos\sqrt{1-\cos x}}$；

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$；　　（4）【2009（3）】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

1.3.10　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a 和 b 的值.

1.3.11　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}[2x-\sqrt{x^2-1}-(ax+b)]=0$，试确定常数 a 与 b 的值.

1.3.12　设当 $x\to 1$ 时，$1-\dfrac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}$ 是 $x-1$ 的等价无穷小，试求 m 的值.

1.3.13　【2011（1）】（1）证明：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立；

（2）设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\quad(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

1.3.14　设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{8}{x_n^2}\right)$（$n=0,1,2,\cdots$），其中 $x_0>0$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.3.15　设数列 $\{x_n\}$ 由以下等式给定，$x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$，$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$，$\cdots$，其中 $a>0$，试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.3.16　设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(2^t+x^t)}{t}$，其中 $x>0$，求 $f(x)$ 的表达式.

1.3.17　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

1.3.18　试求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}$ 的间断点，并指出其类型.

1.3.19　试求函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi x}{2}}$ 的间断点，并指出其类型.

1.3.20　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$0<f(x)<1$，证明方程 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

1.3.21　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，$c_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}.$$

1.4　深化训练详解

1.3.1　填空题

（1）$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-5 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$.

（2）$\dfrac{1}{1+2x}$；$\{x\,|\,x\in R, x\neq -1, x\neq -2\}$. **提示**　根据复合函数的定义，有

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+(1+x)}=\frac{1}{1+2x};$$

$f[f(x)]$ 的定义域满足 $1+x\neq 0$，且 $1+f(x)\neq 0$，因而 $f[f(x)]$ 的定义域为

$$D=\{x\,|\,x\in R, x\neq -1, x\neq -2\}.$$

（3）1. **提示**　令 $y=x$，则有 $f(2x)=2f(x)+2x^2$，从而 $f(x)=\dfrac{1}{2}f(2x)-x^2$，因此

$$f(1)=\frac{1}{2}f(2)-1,\quad f(2)=\frac{1}{2}f(4)-4,$$

所以 $f(1)=1$.

（4）0.　　（5）2.

（6）$-\dfrac{1}{2}$. **提示**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

（7）2.　　（8）1.

（9）$\dfrac{1}{5}$. **提示**　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^{n+1}}{2^n+5^{n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+5}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+5^2}=\dfrac{1}{5}$.

（10） 4 .

（11） $f(x)=2x-\dfrac{4\pi}{3}\sin x$． **提示**　因为极限值等于某个常数，因此不妨设

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=A,$$

原题等式两边同时求极限，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2x+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 4A\sin x,$$

即有 $A=\pi+4A$，所以 $A=-\dfrac{\pi}{3}$，从而 $f(x)=2x-\dfrac{4\pi}{3}\sin x$.

（12） $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

1.3.2　单项选择题

（1）（A）．**提示**　由于

$$|f(x)|=\left|\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\right|=\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}\frac{|\sin(x-2)|}{|x-2|}\leqslant\frac{1}{|(x-1)(x-2)|},$$

当 $x\in(-1,0)$ 时，有

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}=\frac{1}{(1-x)(2-x)}<\frac{1}{2},$$

故答案选（A）．本题也可以利用极限的思想求解．

（2）（D）．**提示**　对任意的 x，有 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x)$.

（3）（C）．

（4）（D）．**提示**　根据数列极限与子数列极限之间的关系可知，选项（D）错误．例如，

$$x_n=\begin{cases} a+\dfrac{1}{n} & n=3k,3k-1 \\ n^2 & n=3k-2 \end{cases},$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在．

（5）（D）．**提示**　若取 $\phi(x)=f(x)=g(x)=1$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$；若取 $\phi(x)=f(x)=g(x)=x^2$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，故选项（D）正确．

（6）（C）．　（7）（B）．　（8）（D）．　（9）（B）.

1.3.3　由于

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{x^4+1}+2=\frac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+2=\frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}+2,$$

因此 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}+2$.

1.3.4　令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t$，$t>0$，则有 $y=\dfrac{t-t^{-1}}{2}$，从而

$$t^2-2yt-1=0,$$

求解一元二次方程可得$t=y\pm\sqrt{y^2+1}$，舍去负根，有 $t=y+\sqrt{y^2+1}$，即有$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$，因此$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数为$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

1.3.5 当$1\leqslant x\leqslant 2$时，由$y=x^2-1$，解得$x=\sqrt{y+1}$，$0\leqslant y\leqslant 3$；当$2<x\leqslant 3$时，由$y=x+6$，解得$x=y-6$，$8<y\leqslant 9$. 综上，$f(x)$的反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{x+1} & 0\leqslant x\leqslant 3\\ x-6 & 8<x\leqslant 9\end{cases}.$$

1.3.6 利用函数表示法的无关特性，令$\dfrac{1}{x}=t$，则有$f\left(\dfrac{1}{t}\right)+2f(t)=1-\dfrac{1}{t}$，联立方程组

$$\begin{cases}f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1-x\\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=1-\dfrac{1}{x}\end{cases},$$

从而有

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3x}+\frac{x}{3}.$$

1.3.7 由题意可知，$F(x)$的定义域关于原点对称，且

$$F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\cdot\frac{1-2^{-x}}{2(2^{-x}+1)}=-f(x)\cdot\frac{2^x-1}{2(1+2^x)},$$

而$F(x)=f(x)\cdot\dfrac{1-2^x}{2(2^x+1)}$，从而有$F(-x)=F(x)$，因此$F(x)$为偶函数.

1.3.8 **解法 1** 因为$\pi<\alpha<2\pi$，所以$0<\alpha-\pi<\pi$，从而

$$\cot(\alpha-\pi)=\cot\alpha=b,$$

故$\alpha-\pi=\operatorname{arccot}b$，即$\alpha=\pi+\operatorname{arccot}b$.

解法 2 因为$\pi<\alpha<2\pi$，所以$0<2\pi-\alpha<\pi$，从而

$$\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha=-b,$$

故$2\pi-\alpha=\operatorname{arccot}(-b)$，即$\alpha=2\pi-\operatorname{arccot}(-b)$.

1.3.9 （1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0.$$

（2）由于当$x\to 0$时，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，因此

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{1-\cos x})^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{4}x^2}=4.$$

（3）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(-x)\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(-x)\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^3}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2}=0.$$

（4）原式$=\lim\limits_{x\to0}e^{\cos x}\cdot\dfrac{e^{1-\cos x}-1}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}e^{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=e\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\dfrac{2e}{3}$.

1.3.10　由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0,$$

所以$\begin{cases}1-a=0\\a+b=0\end{cases}$，因此$a=1$，$b=-1$.

1.3.11　由于

$$原式=\lim_{x\to+\infty}[2x-\sqrt{x^2-1}-(ax+b)]=\lim_{x\to+\infty}[x-\sqrt{x^2-1}+(1-a)x-b]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+(1-a)x-b\right)=0,$$

则$1-a=0$，即$a=1$．从而

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

1.3.12　根据等价无穷小的定义，有

$$1=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+\cdots+x^{m-1}-m}{x^m-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1+2x+\cdots+(m-1)x^{m-2}}{mx^{m-1}}=\frac{1+2+\cdots+(m-1)}{m}=\frac{m-1}{2},$$

所以$m=3$.

1.3.13　（1）令$f(x)=\ln(1+x)(x>0)$，则$f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$．函数$f(x)$在$\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$上利用拉格朗日中值定理，则至少存在$\xi\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，使得$f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f(0)=f'(\xi)\cdot\dfrac{1}{n}$，即

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n\cdot(1+\xi)},$$

因为$\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}<\dfrac{1}{1+\xi}<\dfrac{1}{1+0}$，即$\dfrac{n}{n+1}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$，所以$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$.

（2）由（1）可知

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

因此数列 $\{a_n\}$ 单调减少. 又因为

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\&=\ln(n+1)-\ln n>0,\end{aligned}$$

因此数列 $\{a_n\}$ 有下界，根据数列的单调收敛准则可知，数列 $\{a_n\}$ 收敛.

1.3.14　由于

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(x_n+x_n+\frac{8}{x_n^2}\right)\geqslant\sqrt[3]{x_n\cdot x_n\cdot\frac{8}{x_n^2}}=2;$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{8}{x_n^2}\right)-x_n=\frac{1}{3x_n^2}\left(8-x_n^3\right)\leqslant 0,$$

因此 $x_{n+1}\leqslant x_n$. 又因为数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界，所以数列 $\{x_n\}$ 收敛.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由题意可得 $A=\frac{1}{3}\left(2A+\frac{8}{A^2}\right)$，所以 $A=2$.

1.3.15　显然数列 $\{x_n\}$ 单调递增，且 $x_n\geqslant\sqrt{a}$. 由于

$$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}},$$

因此 $x_n^2=a+x_{n-1}$，于是 $x_n^2<a+x_n$，从而

$$x_n<\frac{a}{x_n}+1\leqslant\frac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1.$$

即数列 $\{x_n\}$ 有界，根据单调有界准则可知，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，根据保号性可知，$\sqrt{a}\leqslant A\leqslant 1+\sqrt{a}$. 等式 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$ 两边同时取极限，有

$$A=\sqrt{a+A},$$

解得 $A=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$，舍去负根，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

1.3.16　当 $0<x<2$ 时，

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t\ln 2+\ln\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^t\right]}{t}=\ln 2;$$

当 $x=2$ 时，

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(2^t+2^t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(t+1)\ln 2}{t}=\ln 2;$$

当 $x>2$ 时，

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t\ln x+\ln\left[1+\left(\frac{2}{x}\right)^t\right]}{t}=\ln x\text{；}$$

综上可得

$$f(x)=\begin{cases}\ln 2 & 0<x\leqslant 2\\ \ln x & x>2\end{cases}.$$

1.3.17

$$f(x)=\begin{cases}x & x<-1\\ 0 & x=-1\\ -x & -1<x<1\\ 0 & x=1\\ x & x>1\end{cases}.$$

1.3.18　由于

$$f(x)=\frac{x(x-2)}{|x|(x-2)(x+2)}\text{，}$$

显然 $x=-2$， $x=0$， $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的间断点．因为

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x(x-2)}{|x|(x-2)(x+2)}=\infty\text{，}$$

故 $x=-2$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点．由于

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{2}\text{，}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{x+2}=-\frac{1}{2}\text{，}$$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点．由于

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{|x|(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}\text{，}$$

因此 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点．

1.3.19　显然 $f(x)$ 的间断点为 $x=1$,　$x=2k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$．因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\frac{\pi}{2}\text{，}\quad\lim_{x\to1^+}f(x)=\frac{\pi}{2}\text{，}$$

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点．由于

$$\lim_{x\to0}f(x)=-\frac{1}{2}\text{，}$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点．当 $k\neq0$ 时，

$$\lim_{x\to2k}f(x)=\infty\text{，}$$

因此 $x=2k(k\neq0,k\in Z)$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点．

1.3.20　构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$\varphi(0)=f(0)>0,\quad \varphi(1)=f(1)-1<0,$$

因此，根据零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$，结论得证.

1.3.21　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此一定存在最大值 M 和最小值 m，使得对任意的 $x\in[a,b]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$．从而

$$c_i m\leqslant c_i f(x_i)\leqslant c_i M,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

故

$$(c_1+c_2+\cdots+c_n)m\leqslant c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)+\cdots+c_n f(x_n)\leqslant(c_1+c_2+\cdots+c_n)M,$$

不等式两边同时除以 $c_1+c_2+\cdots+c_n$，得

$$m\leqslant\frac{c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)+\cdots+c_n f(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\leqslant M,$$

由介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)+\cdots+c_n f(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}.$$

1.5　综合提高训练

例 1.5.1　判断函数 $f(x)=x\cos x$ 是否为周期函数，若为周期函数，求其周期，若不是周期函数，说明理由.

解　利用反证法．假设 $f(x)=x\cos x$ 是周期函数，则存在 $T>0$，使得对 $\forall x\in R$，有

$$f(x+T)=f(x).$$

即

$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x.$$

取 $x=0$，则有 $T\cos(T)=0$，从而 $\cos(T)=0$，所以有

$$T=k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

取 $x=T$，则有 $2T\cos(2T)=T\cos(T)=0$，从而

$$\cos(2T)=0.$$

而 $\cos(2T)=\cos(2k\pi+\pi)=-1$，矛盾．因此假设不成立，即 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数.

例 1.5.2　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，试证明对任意的两点 $x_1>0$，$x_2>0$，有 $f(x_1)+f(x_2)\leqslant f(x_1+x_2)$.

证　不妨设 $0<x_1\leqslant x_2$，由于 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，因此

$$\frac{f(x_1)}{x_1}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2},\quad \frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2},$$

即

$$x_2 f(x_1) \leqslant x_1 f(x_2)\,,\quad x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2) \leqslant x_2 f(x_1 + x_2)\,,$$

故

$$x_2[f(x_1) + f(x_2)] \leqslant x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2) \leqslant x_2 f(x_1 + x_2)\,,$$

从而有

$$f(x_1) + f(x_2) \leqslant f(x_1 + x_2)\,.$$

例 1.5.3　设 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+2x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0}\left[1+2x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+2x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}\right\} = \mathrm{e}^3\,,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+2x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x} = 3\,,\quad \text{且}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0\,,$$

从而利用等价无穷小量代换得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+2x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+\dfrac{f(x)}{x}}{x} = 2 + \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 3\,,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 1\,,$$

故

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}} = \mathrm{e}\,.$$

例 1.5.4　设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n\right]^{1/n}$，其中 $x \geqslant 0$，讨论 $f(x)$ 的连续性.

解　当 $0 \leqslant x < 1$ 时，

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left[1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right]^{1/n} = 1^0 = 1\,;$$

当 $x = 1$ 时， $f(x) = 2^0 = 1$；当 $1 < x < 2$ 时，

$$f(x) = x\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x^n}+1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]^{1/n} = x\cdot 1^0 = x\,;$$

当 $x = 2$ 时，

$$f(x)=2\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^n}+1+1\right]^{1/n}=2\times 2^0=2\,;$$

当 $x>2$ 时，

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1\right]^{1/n}=\frac{x^2}{2}.$$

综上

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x & 1<x\leqslant 2\,.\\ \dfrac{1}{2}x^2 & x>2\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处连续，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

例 1.5.5　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{3}\right).$$

解　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{3}\right),$$

则

$$F(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{3}\right),\quad F\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{2}{3}\right),\quad F\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)-f(1)\,.$$

（1）若 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$ 和 $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 至少有两个相等，如 $f(0)=f\left(\frac{1}{3}\right)$，则取 $\xi=\frac{1}{3}$，结论成立.

（2）若 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$ 和 $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 都互不相等，则 $F(0)\neq 0$，$F\left(\frac{1}{3}\right)\neq 0$，$F\left(\frac{2}{3}\right)\neq 0$.

不妨设 $F(0)>0$，接下来又分两种情况进行讨论.

若 $F\left(\frac{1}{3}\right)<0$，则由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{1}{3}\right)\subset(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，结论得证；

若 $F\left(\frac{1}{3}\right)>0$，则有 $f(0)>f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)$，从而 $F\left(\frac{2}{3}\right)<0$，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{2}{3}\right)\subset(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，从而结论得证.

例 1.5.6　设 $a>0,b>0,c>0$，

$$A(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} & x\neq 0\\ c & x=0\end{cases},$$

（1）讨论 $A(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性；

（2）讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)$，$\lim\limits_{x\to0}A(x)$，$A(-1)$ 以及 $A(1)$ 之间的大小关系.

解　（1）由于

$$\lim_{x\to0}A(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln2}{x}},$$

而

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{a^x+b^x-2}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{b^x-1}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab},$$

故

$$\lim_{x\to0}A(x)=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.$$

所以当 $c=\sqrt{ab}$ 成立时，$A(x)$ 在 $x=0$ 处连续，否则 $A(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

（2）由于

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln2}{x}\right\},$$

当 $a>b$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a^x\left[1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^x\right]-\ln2}{x}\right\}=a;$$

当 $a<b$ 时，由对称性可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=b$，当 $a=b$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=a$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=\max\{a,b\}.$$

类似地

$$\lim_{x\to-\infty}A(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln2}{x}\right\},$$

令 $t=-x$，则

$$\lim_{x\to-\infty} A(x) = \exp\left\{\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(a^{-t}+b^{-t})-\ln 2}{-t}\right\}.$$

当 $a>b$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty} A(x)=b$；当 $a<b$ 时，由对称性可知，$\lim\limits_{x\to-\infty} A(x)=a$；当 $a=b$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=a$. 因此

$$\lim_{x\to-\infty} A(x) = \min\{a,b\}.$$

又因为 $A(-1)=\dfrac{2ab}{a+b}$，$A(1)=\dfrac{a+b}{2}$，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)\geqslant A(1)\geqslant \lim\limits_{x\to 0} A(x)\geqslant A(-1)\geqslant \lim\limits_{x\to-\infty} A(x)$.

第 2 章　导数与微分

2.1　知识要点

2.1.1　导数的概念

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数为：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

左导数、右导数的定义分别为：

$$f'_{-}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

$$f'_{+}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

显然，$f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数、右导数都存在并且相等.

在讨论初等函数在定义区间端点的可导性或分段函数在分段点处的可导性时，往往利用左导数、右导数进行讨论.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内任意一点 x 处都可导，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导．对于 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，并且 $f'_{+}(a)$ 与 $f'_{-}(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导．类似可以给出函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 上可导的定义.

2.1.2　导数的几何意义与物理意义

1．导数的几何意义

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率，从而曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),$$

其中 $f'(x_0)\neq 0$．若 $f'(x_0)=0$，则法线方程为 $x=x_0$．

2．导数的物理意义

设质点作变速直线运动，若路程 y 可以表示为时间 x 的函数 $y=f(x)$，则 $f'(x_0)$ 表示在 $x=x_0$ 时刻的瞬时速度.

2.1.3　基本初等函数的导数公式

（1）$c'=0$；

（2）$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha$ 为任意实数）；

（3）$(a^x)'=a^x\ln a$（$a>0,a\neq 1$）；

（4）$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

（5）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\quad(a>0,a\neq 1)$；

（6）$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$；

（7）$(\sin x)'=\cos x$；

（8）$(\cos x)'=-\sin x$；

（9）$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$；

（10）$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$；

（11）$(\sec x)'=\sec x\tan x$；

（12）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

（13）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（14）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（15）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；

（16）$(\mathrm{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$．

2.1.4　导数的四则运算法则

如果函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均可导，那么它们的和、差、积、商（除分母为零的点外）都可导，并且：

（1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

（2）$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$；

（3）$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$，其中 $v(x)\neq 0$．

推论　若 $u_1,\cdots,u_k$ 均为 x 的函数且可导，k 为某个正整数，c 为某个常数，则

（1）$(u_1+\cdots+u_k)'=u_1'+\cdots+u_k'$；

（2）$(cu)'=cu'$；

（3）$(u_1u_2\cdots u_k)'=u_1'u_2\cdots u_k+u_1u_2'\cdots u_k+\cdots+u_1u_2\cdots u_k'$；

（4）$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$，其中 $v\neq 0$．

2.1.5　常用求导法则

1．复合函数的求导法则

若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $\varphi'(x)$，函数 $y=f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 处有导数 $f'(u)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导，且有

$$\{f[\varphi(x)]\}' = f'(u)\varphi'(x)\text{，或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

2．反函数的求导法则

设单调连续函数 $x=\varphi(y)$ 在点 y 处可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$ 在对应点 x 处可导，且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

3．隐函数的求导法则

设 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，将方程中的 y 看成 x 的函数，方程两边同时对 x 求导（注意 y 为 x 的函数，对 y 的函数求导时，需要用复合函数求导法则），解出 y' 即可.

4．对数求导法则

先对函数两边取对数，将其变成隐函数，然后利用隐函数求导法则即可．当 $f(x)$ 为多个函数的乘积或商的形式，或者为幂指函数形式时，可考虑使用对数求导法则进行求解.

5．参数求导法则

设 x 和 y 的函数关系 $y=f(x)$ 由参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

给定，若函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均可导，$x'(t)\neq 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

2.1.6　高阶导数

1．高阶导数的定义

函数 $y=f(x)$ 导数的导数称为 $f(x)$ 的**二阶导数**，记为

$$f''(x),\quad y'',\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

即有

$$f''(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}\text{，或 } f''(x) = \lim_{t\to x}\frac{f'(t)-f'(x)}{t-x}.$$

若 $y=f(x)$ 在 x 处的二阶导数存在，也称函数 $f(x)$ 在点 x 处**二阶可导**．一般地，$y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n **阶导数**，记为

$$f^{(n)}(x),\quad y^{(n)},\quad \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n},\quad \frac{\mathrm{d}^nf(x)}{\mathrm{d}x^n},$$

即有

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'\text{，或}\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

同理，若 $y=f(x)$ 在 x 处的 n 阶导数存在，也称函数 $f(x)$ 在点 x 处 n 阶可导.

注　根据二阶导数的定义，若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导，即 $f''(x_0)$ 存在，则 $f'(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内一定有定义；二阶以及二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

2．莱布尼兹公式

设函数 $u=u(x)$ ， $v=v(x)$ 均 n 阶可导，则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

其中 $u^{(0)}=u,\quad v^{(0)}=v$.

3．参数求导法则

设 x 和 y 的函数关系 $y=f(x)$ 由参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

给定，若函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均二阶可导，且 $x'(t)\neq 0$ ，则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^2}\cdot\frac{1}{x'(t)}\\&=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}.\end{aligned}$$

4．几个常用的高阶导数公式

（1） $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$；

（2） $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$；

（3） $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a\ \ (a>0,a\neq 1)$.

2.1.7　微分的概念与性质

1．微分的概念

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 的某个邻域内有定义，当自变量在点 x 处取得增量 Δx 时（点 $x+\Delta x$ 仍在该邻域内），函数 y 相应地取得改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ ，若 Δy 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\qquad(\Delta x\to 0),$$

其中 A 可以与 x 有关，但与 Δx 无关，则称 $y=f(x)$ 在点 x 处**可微**，并称 $A\Delta x$ 为 $y=f(x)$ 在点 x 处的**微分**，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$ ，即有

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=A\Delta x.$$

由定义，微分 $\mathrm{d}y$ 是 Δx 的线性函数，当 $A\neq 0$ 时，也称微分 $\mathrm{d}y$ 是增量 Δy 的线性主部函数，微分 $\mathrm{d}y$ 与增量 Δy 仅相差一个关于 Δx 的高阶无穷小，即 $\mathrm{d}y=\Delta y+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$.

2．导数与微分的相关定理

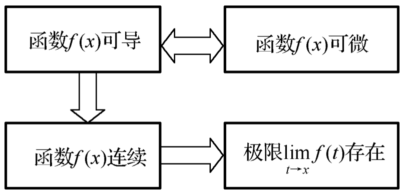
函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，并且 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$. 根据微分的定义，$\mathrm{d}x=(x)'\Delta x=\Delta x$ ，因此函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分最终可以表示为

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x .$$

从导数与微分的关系可以看到，一元函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导与可微是等价的，且有 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即导数可视为函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量微分 $\mathrm{d}x$ 的商，因此，导数也被称为“**微商**”.

3．极限、连续及微分之间的关系

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 的某个邻域内有定义，则函数的极限、连续、偏导数及微分之间有如下关系：



4．微分的四则运算法则

设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x 处均可微，则有：

（1） $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$ ；

（2） $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$ ；

（3） $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$，其中 $v\neq 0$.

5．复合函数的微分法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可微，$y=f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 处可微，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可微，且

$$\mathrm{d}y=y'_x\mathrm{d}x=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x .$$

由于 $\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$ ，所以 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分也可以表示为

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u .$$

这说明对于函数 $y=f(u)$ ，不论 u 是自变量还是中间变量，其微分都可以表示为如下形式

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u ,$$

这一性质称为一阶微分形式不变性.

2.1.8　微分在近似计算中的应用

1．函数的近似计算公式

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，根据微分的定义，当 $|\Delta x|$ 很小时，有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\mathrm{d}x=f'(x_0)\Delta x ,$$

从而
$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,$$
若取 $x=x_0+\Delta x$，则当 $|x-x_0|$ 很小时，有
$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

2．一些常见的近似公式

当 $|x|$ 很小时，有：

（1）$\sin x\approx x$；　（2）$\tan x\approx x$；　（3）$\arcsin x\approx x$；

（4）$e^x\approx 1+x$；　（5）$\ln(1+x)\approx x$；　（6）$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{n}$.

*3．误差估计

设某个量的精确值为 A，它的近似值为 a，则称 $|A-a|$ 为 a 的**绝对误差**，$\dfrac{|A-a|}{|a|}$ 称为 a 的**相对误差**．事实上，在实际问题中，由于精确值 A 往往无法得到，故绝对误差和相对误差也就无法求得.

若 $|A-a|\leqslant\delta$，则称 δ 为**绝对误差限**，$\dfrac{\delta}{|a|}$ 为**相对误差限**．绝对误差限与相对误差限通常也称为**绝对误差与相对误差**.

2.2　典型例题分析

2.2.1　题型一、导数与微分的定义问题

例 2.2.1　【2007（1，3）】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$；

（B）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$；

（C）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在；

（D）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

解　答案选（D）．若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，由
$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to0}x=0$$
可知命题（A）正确，类似可推知命题（B）正确．又因为
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$
故命题（C）正确．故由排除法可知命题（D）是错误的．事实上，若取 $f(x)=|x|$，显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0\,,$$

但函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

例 2.2.2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cot^2 x(\cos(\sec^2 x)-\cos 1)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(1+\tan^2 x)-\cos 1}{\tan^2 x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\cos(1+u)-\cos 1}{u}$

$=(\cos u)'\big|_{u=1}=-\sin 1$.

例 2.2.3　已知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-2\Delta x)}{\Delta x}=x^2+\sin x$，试求 $\mathrm{d}f(x)$.

解　由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x-2\Delta x)}{\Delta x}=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x-2\Delta x)}{2\Delta x}=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-2\Delta x)-f(x)}{-2\Delta x}$$
$$=2\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=2f'(x)\,,$$

因此 $f'(x)=\dfrac{1}{2}(x^2+\sin x)$，从而

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2+\sin x)\mathrm{d}x\,.$$

例 2.2.4　【2006（3）】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在；　　（B）$f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在；

（C）$f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在；　　（D）$f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

解　令 $t=h^2$，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=1\,,$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故

$$f(0)=\lim_{t\to 0^+}f(t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}\cdot t=1\times 0=0\,.$$

且

$$1=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'_+(0)\,.$$

故选项（C）正确.

例 2.2.5　【2011（3）】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　　）.

（A）$-2f'(0)$；　　（B）$-f'(0)$；　　（C）$f'(0)$；　　（D）0 .

解　根据导数的定义

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$$

$$= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).$$

故选项（B）正确．

例 2.2.6　设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的一个充要条件是（　　）．

（A）$\lim\limits_{h\to+\infty} h f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ 存在；　　（B）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在；

（C）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(\mathrm{e}^h-1)$ 存在；　　（D）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(\cos h-1)$ 存在．

解　答案选（C）．因为，令 $t=\mathrm{e}^h-1$，则 $h\to0\Leftrightarrow t\to0$，从而

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}f(\mathrm{e}^h-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(\mathrm{e}^h-1)}{\mathrm{e}^h-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(\mathrm{e}^h-1)}{\mathrm{e}^h-1}\cdot\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0).$$

选项（A）错误．因为令 $t=\dfrac{1}{h}$，则 $h\to+\infty\Leftrightarrow t\to0^+$，从而

$$\lim_{h\to+\infty} h f\left(\frac{1}{h}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'_+(0),$$

即选项（A）中的极限存在仅保证了 $f'_+(0)$ 存在．

选项（B）错误．因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导可以推出极限 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在．但 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在不一定能推出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，如取 $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\neq0\end{cases}$，则

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-1}{h}=\lim_{h\to0}0=0,$$

即极限 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在，但函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导．

选项（D）错误．因为令 $t=\cos h-1$，则 $h\to0\Leftrightarrow t\to0^-$，从而

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(\cos h-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(\cos h-1)}{\cos h-1}\cdot\frac{\cos h-1}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f(\cos h-1)}{\cos h-1}\cdot\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t}=-\frac{1}{2}f'_-(0),$$

即选项（D）中极限存在仅保证了 $f'_-(0)$ 存在．

2.2.2　题型二、分段函数的求导问题

例 2.2.7　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2g(x) & x\leqslant0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 为可导函数，试求 $f'(x)$．

解　显然当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}\sin x-(1-\cos x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2x\sin x+\cos x-1}{2\sqrt{x^3}}.$$

当 $x<0$ 时，$f'(x)=2xg(x)+x^2g'(x)$.

在 $x=0$ 处，由于 $f(0)=0$，故

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=0,$$

从而 $f'(0)=0$，因此

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x\sin x+\cos x-1}{2\sqrt{x^3}} & x>0\\ 0 & x=0\\ 2xg(x)+x^2g'(x) & x<0\end{cases}.$$

例 2.2.8　【2012（3）】设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x} & x\geqslant1\\ 2x-1 & x<1\end{cases}$，$y=f[f(x)]$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=$ ________.

解　由题意 $f(\mathrm{e})=\ln\sqrt{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{2}$，根据复合函数的链式法则，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[f(x)]\right|_{x=\mathrm{e}}=f'\left(\frac{1}{2}\right)f'(\mathrm{e}),$$

而

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=(2x-1)'\big|_{x=\frac{1}{2}}=2,\quad f'(\mathrm{e})=(\ln\sqrt{x})'\big|_{x=\mathrm{e}}=\frac{1}{2\mathrm{e}},$$

故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=2\times\frac{1}{2\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

2.2.3　题型三、导数的几何意义

例 2.2.9　【2003（3）】已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为________.

解　不妨设曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴在 $x=x_0$ 处相切，则

$$y(x_0)=x_0^3-3a^2x_0+b=0,\quad y'(x_0)=3x_0^2-3a^2=0,$$

解得 $x_0=a$ 或 $x_0=-a$，$b=2a^3$ 或 $b=-2a^3$，因此 $b^2=4a^6$.

例 2.2.10　【1998（3）】曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则

$\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) =$ ______ .

解　由于

$$f'(1) = nx^{n-1}\Big|_{x=1} = n,$$

因此切线方程为 $y-1=n(x-1)$. 令 $y=0$，解得 $\xi_n = 1-\dfrac{1}{n}$. 故

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{(-n)\times(-1)} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 2.2.11　设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且有

$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + o(x) \quad (x\to 0),$$

求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程.

解　由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，从而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. 而

$$\lim_{x\to 0} f(1+\sin x) - 3\lim_{x\to 0} f(1-\sin x) = \lim_{x\to 0} 8x + \lim_{x\to 0} o(x),$$

解得 $f(1)=0$. 而

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{-3f(1-t)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t} + 3\lim_{t\to 0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t} \\
&= 4f'(1),
\end{aligned}$$

且

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{x} = 8,$$

故 $4f'(1)=8$，从而 $f'(1)=2$，因此，切线方程为 $y-0=2(x-1)$，即 $y=2x-2$.

2.2.4　题型四、导函数的几何特性问题

例 2.2.12　证明下列结论.

（1）若函数 $f(x)$ 可导且为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数；

（2）若函数 $f(x)$ 可导且为偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数；

（3）若函数 $f(x)$ 可导且为周期函数，则 $f'(x)$ 为周期函数，且周期相同.

证　这里只证明（1），结论（2）和（3）类似可证.

（1）设 $f(x)$ 可导，且为奇函数，则对于任意的 $x\in D(f)$，有

$$f(-x) = -f(x).$$

等式两边同时对 x 求导数，得

$$f'(-x)\cdot(-1) = -f'(x),$$

即 $f'(-x)=f'(x)$，所以 $f'(x)$ 为偶函数.

例 2.2.13　证明下列结论：

（1）若 $f(x)$ 为奇函数，且 $f'(x_0)=A$，则 $f'(-x_0)=A$；

（2）若 $f(x)$ 为偶函数，$f'(x_0)=A$，则 $f'(-x_0)=-A$；

（3）若 $f(x)$ 为周期为 T 的函数，$f'(x_0)=A$，则 $f'(x_0+T)=A$.

证　这里只证明（1），结论（2）和（3）类似可证．根据导数的定义，得

$$f'(-x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x_0+\Delta x)-f(-x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x_0-\Delta x)+f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0).$$

注　这里条件仅仅说明函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，没有给出导函数 $f'(x)$ 存在，因此不能使用上题的方法，只能按照导数的定义求解.

2.2.5　题型五、利用可导性求参数值（域）

例 2.2.14　已知 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 1 \\ ax+b\sqrt{x} & x>1 \end{cases}$ 可导，试求 a、b 的值.

解　因为 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，即有

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1).$$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=a+b$，$f(1)=1$，得 $a+b=1$．又因为 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，所以 $f'_-(1)=f'_+(1)$．而

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)+b(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

$$=a+b\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=a+\frac{b}{2},$$

故 $a+\dfrac{b}{2}=2$，解得 $a=3,\ b=-2$.

例 2.2.15　设 $f(x)=\begin{cases} |x|^\lambda\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，其导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是________.

解　显然，当 $\lambda>1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且当 $\lambda>1$ 时，

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^\lambda\cos\frac{1}{x}-f(0)}{x-0}\lim_{x\to 0^+}x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}=0;$$

又因为 $f(x)$ 为偶函数，因此

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}=-\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=-f'_+(0)=0,$$

故 $f'(0)=0$．当 $x>0$ 时，$f(x)=|x|^{\lambda}\cos\frac{1}{x}=x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}$，从而

$$f'(x)=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}.$$

当 $x<0$ 时，$f(x)=|x|^{\lambda}\cos\frac{1}{x}=(-x)^{\lambda}\cos\frac{1}{x}$，从而

$$f'(x)=-\lambda(-x)^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+(-x)^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}.$$

由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而

$$\lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^+}f'(x)=f'(0)=0,$$

故 $\lambda>2$．

2.2.6　题型六、高阶导数问题

例 2.2.16　【2006（3）】设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$________.

解　由于

$$f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot\mathrm{e}^{f(x)}=\mathrm{e}^{2f(x)},$$

$$f'''(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}\cdot2f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}\cdot2\mathrm{e}^{f(x)}=2\mathrm{e}^{3f(x)},$$

故

$$f'''(2)=2\mathrm{e}^{3f(2)}=2\mathrm{e}^{3}.$$

例 2.2.17　已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$，求极限 $\lim\limits_{t\to0}\frac{f'(2-t)-f'(2)}{t}$.

解　由于

$$\lim_{t\to0}\frac{f'(2-t)-f'(2)}{t}=-\lim_{t\to0}\frac{f'(2-t)-f'(2)}{-t}=-f''(2),$$

又因为

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2},$$

$$f''(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{x^3}\right),$$

所以

$$f''(2)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{16}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{16}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

例 2.2.18　已知函数 $y=f(x)=\begin{cases}x^4\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$，试求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解　当 $x \neq 0$ 时，

$$f'(x)=4x^3\sin\frac{1}{x}+x^4\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

即

$$f'(x)=4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}.$$

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x}=0,$$

根据二阶导数的定义，有

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right)=0.$$

2.2.7　题型七、反函数、复合函数的求导问题

例 2.2.19　已知函数 $x=y-\frac{1}{2}\sin y$ 一定存在反函数 $y=f(x)$，求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$.

解　由于

$$x'_y=1-\frac{1}{2}\cos y>0,$$

因此

$$f'(x)=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}=\frac{2}{2-\cos y}.$$

根据复合函数求导法则，有

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{2-\cos y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{2}{2-\cos y}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-2\sin y}{(2-\cos y)^2}\cdot\frac{2}{2-\cos y}\\&=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}.\end{aligned}$$

例 2.2.20　已知单调函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=\varphi(y)$，且 $y=f(x)$ 二阶可导，$f'(x)\neq 0$，试求 $x=\varphi(y)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$.

解　由反函数求导法则可知，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{f'(x)}.$$

根据复合函数求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

例 2.2.21　已知函数 $f(x)=\sin x$， $g(x)=\mathrm{e}^{2x}$，试求 $f'[g(x)]$ 和 $\{f[g(x)]\}'$．

解　由题意

$$f'(x)=\cos x,\quad g'(x)=2\mathrm{e}^{2x},$$

所以

$$f'[g(x)]=\cos(\mathrm{e}^{2x}),$$

$$\begin{aligned}\{f[g(x)]\}'&=f'[g(x)]\cdot g'(x)\\&=\cos(\mathrm{e}^{2x})\cdot 2\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{2x}\cos(\mathrm{e}^{2x}).\end{aligned}$$

注　$f'[g(x)]$ 表示先求导数、再进行复合运算，$\{f[g(x)]\}'$ 表示先进行复合运算、再求导数.

2.2.8　题型八、隐函数的求导问题

例 2.2.22　设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\sin(xy)-\dfrac{1}{y-x}=1$ 所确定，试求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

解　当 $x=0$ 时， $y=-1$．方程 $\sin(xy)-\dfrac{1}{y-x}=1$ 两边同时对 x 求导数得

$$\cos(xy)\cdot(xy)'-\frac{-(y-x)'}{(y-x)^2}=0,$$

从而有

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')+\frac{y'-1}{(y-x)^2}=0,$$

将 $x=0$， $y=-1$ 代入上式得

$$-1+\frac{y'(0)-1}{1}=0,$$

解得 $y'(0)=2$，从而 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-(-1)=2(x-0)$，即 $y=2x-1$．

例 2.2.23　已知 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt{x-1}}{(x+4)^2\mathrm{e}^{2x}}$，求 y'．

解　等式两边同时取对数，则有

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-2x,$$

上式两边同时对 x 求导数，并将 y 视为 x 的函数，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{x+4}-2,$$

所以

$$y'=y\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{x+4}-2\right)$$

$$=\frac{(x+1)\sqrt{x-1}}{(x+4)^2 e^{2x}}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{x+4}-2\right).$$

2.2.9　题型九、导函数的连续性问题

例 2.2.24　设 $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，试求 $f'(x)$ 的表达式，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

解　当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)'=3x^2\sin\frac{1}{x}+x^3\cos\frac{1}{x}\times\left(\frac{1}{x}\right)'=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}.$$

当 $x=0$ 时，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0,$$

即 $f'(0)=0$. 因此

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left[3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right]=0=f'(0),$$

因此 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

2.2.10　题型十、参数方程的求导问题

例 2.2.25　【2010（1）】设 $\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)du \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$ ________.

解　正确答案为 0；由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}=-e^t\ln(1+t^2),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}$$

$$=\left[-e^t\ln(1+t^2)-e^t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right]\cdot\frac{1}{-e^{-t}}$$

$$=e^{2t}\left[\ln(1+t^2)+\frac{2t}{1+t^2}\right],$$

因此 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=0$.

例 2.2.26　设 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t^2+3t+4 \\ \mathrm{e}^y\cos t+y^2+t=0 \end{cases}$ 确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　由题意，$x'(t)=4t+3$. 等式 $\mathrm{e}^y\cos t+y^2+t=0$ 两边同时对 t 求导数得

$$y'(t)\cdot\mathrm{e}^y\cos t-\mathrm{e}^y\sin t+2y\cdot y'(t)+1=0,$$

解得

$$y'(t)=\frac{\mathrm{e}^y\sin t-1}{\mathrm{e}^y\cos t+2y},$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\dfrac{\mathrm{e}^y\sin t-1}{\mathrm{e}^y\cos t+2y}}{4t+3}=\frac{\mathrm{e}^y\sin t-1}{(\mathrm{e}^y\cos t+2y)(4t+3)}.$$

2.2.11　题型十一、微分问题

例 2.2.27　设函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^2\arctan y+x+y=1$ 确定，试求 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

解法 1　当 $x=0$ 时，$y=1$，等式 $x^2\arctan y+x+y=1$ 两边同时对 x 求导数，则

$$2x\arctan y+x^2\cdot\frac{y'}{1+y^2}+1+y'=0,$$

解得 $y'=-\dfrac{(1+y^2)(1+2x\arctan y)}{x^2+y^2+1}$，从而

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=-\frac{(1+y^2)(1+2x\arctan y)}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x,$$

故 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=-\mathrm{d}x$.

解法 2　当 $x=0$ 时，$y=1$，等式 $x^2\arctan y+x+y=1$ 两边同时取微分，则

$$2x\mathrm{d}x\cdot\arctan y+x^2\cdot\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}+\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0,$$

解得 $\mathrm{d}y=-\dfrac{(1+y^2)(1+2x\arctan y)}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x$，从而 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=-\mathrm{d}x$.

例 2.2.28　若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，$\mathrm{d}y$ 与 Δy 分别表示函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分与增量，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{d}y-\Delta y}{\Delta x}=$（　　）.

（A）1；　　（B）-1；　　（C）0；　　（D）无法确定.

解　根据微分的定义，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$，因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{d}y-\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-o(\Delta x)}{\Delta x}=0,$$

故答案选（C）.

2.3　深化训练

2.3.1　填空题

（1）【2011（3）】设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$________.

（2）设 $y=x^2 2^x+\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$，则 $y'=$________.

（3）设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1, f'(0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(\ln x)-1}{x-1}=$________.

（4）已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 满足 $f(x_0)=2$，则 $f[f'(x_0)]=$________.

（5）【2007（3）】设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$________.

（6）已知 $y^{(n-2)}=f(\ln x)$，其中 f 任意阶可导，则 $y^{(n)}=$________.

（7）【2013（1）】设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$________.

（8）【2008（1）】曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

（9）【2011（3）】曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

（10）【2013（1）】设 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________.

2.3.2　单项选择题

（1）【2004（1）】设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得（　　）.

（A）$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加；

（B）$f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少；

（C）对于任意的 $x\in(0,\delta)$，有 $f(x)>f(0)$；

（D）对于任意的 $x\in(-\delta,0)$，有 $f(x)>f(0)$.

（2）【2012（1，3）】设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$（　　）.

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$；　（B）$(-1)^n(n-1)!$；

（C）$(-1)^{n-1}n!$；　（D）$(-1)^n n!$.

（3）若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则下列选项不一定正确的是（　　）.

（A）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$；　（B）$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)$；

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a+h)}{h}$ 存在；　（D）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(a)-f(x)}{x-a}$ 存在.

（4）设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0)}=\dfrac{1}{4}$，则 $f'(x_0)$ 等于（　　）.

（A）4；　（B）–4；　（C）2；　（D）–2.

（5）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1} & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（　　）.

（A）不连续；　　（B）连续但不可导；

（C）可导；　　（D）不确定.

（6）设 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-2\Delta x)}{\Delta x}=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{1+a^2}$；　　（B）$-\dfrac{1}{1+a^2}$；　　（C）$\dfrac{2}{1+a^2}$；　　（D）$-\dfrac{2}{1+a^2}$.

（7）设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$\mathrm{d}y$ 与 Δx 是等价无穷小量；　　（B）$\mathrm{d}y$ 是比 Δx 高阶的无穷小量；

（C）$\Delta y-\mathrm{d}y$ 是比 Δx 高阶的无穷小量；　　（D）$\Delta y-\mathrm{d}y$ 与 Δx 是同阶无穷小量.

（8）若下列极限都存在，则下列等式成立的是（　　）.

（A）$\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$；　　（B）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x}=f'(x_0)$；

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)$；　　（D）$\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$.

（9）设函数 $f(x)$ 对 $\forall x\in R$ 均满足 $f(-x)=f(x)$，且 $f'(-x_0)=2$，则 $f'(x_0)=$（　　）.

（A）2；　　（B）-2；　　（C）$\dfrac{1}{2}$；　　（D）$-\dfrac{1}{2}$.

（10）【2016（4）】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots\end{cases}$，则（　　）.

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点；　　（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点；

（C）$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导；　　（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

2.3.3　已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=0$，$f'(1)=2$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n$.

2.3.4　设 $f(x)$ 为可导的偶函数，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x-1)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1}{2}$，求 $f'(-1)$.

2.3.5　【2015（1，3）】（1）设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明：$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（2）设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

2.3.6　已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且周期为 5，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1+2x)}{x}=\dfrac{1}{4}$，试求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,1)$ 处的切线方程.

2.3.7　已知 $g(x)$ 具有连续导数，$f(x)=(x-a)^2g(x)$，试求 $f'(a)$，$f''(a)$.

2.3.8　设 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x<0\\ \ln(ax+b) & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，试求常数 a、b 的值.

2.3.9　设 $y=f(\ln x)+\ln f(x)$，其中 $f(x)$ 二阶可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2.3.10　已知 $y=x\cdot f\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$，其中 f 二阶可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2.3.11　已知摆线的参数方程为 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，其中 $a>0$，试求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

2.3.12　设函数 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin(2x)+\cdots+a_n\sin(nx)$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为实数，且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，试证明 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.

2.3.13　设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^x+xy+\mathrm{e}^y=2$ 所确定的隐函数，试求 $y'(0)$ 和 $y''(0)$.

2.3.14　设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f'(x)\neq 0$，$x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，试将 $x=\varphi(y)$ 所满足的方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=f(x)$ 的方程.

2.3.15　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且 $f'(1)=a(a\neq 0)$，对 $\forall x,y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，试求 $f'(x)$.

2.4　深化训练详解

2.3.1　填空题

（1）$(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$. **提示**

$$f(x)=x\cdot\lim_{t\to 0}(1+3t)^{\frac{1}{3t}\cdot(3x)}=x\mathrm{e}^{3x},\quad f'(x)=\mathrm{e}^{3x}+3x\mathrm{e}^{3x}=(1+3x)\mathrm{e}^{3x}.$$

（2）$x2^x(2+x\ln 2)$.

（3）-1 . **提示**　令 $t=\ln x$，则

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-1}{\mathrm{e}^t-1}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t)-f(0)}{t}=f'(0).$$

（4）$\dfrac{9}{5}$.

（5）$\dfrac{(-1)^n2^nn!}{3^{n+1}}$. **提示**　$y=\dfrac{1}{2x+3}=(2x+3)^{-1}$，

$$y'=-(2x+3)^{-2},\quad y''=(-1)(-2)2^2(2x+3)^{-3},\quad y'''=(-1)(-2)(-3)2^3(2x+3)^{-4},$$

一般地

$$y^{(n)}=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)2^n(2x+3)^{-(n+1)}.$$

因此

$$y^{(n)}(0)=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)2^n3^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n2^nn!}{3^{n+1}}.$$

（6）$\dfrac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}$.

（7）1. **提示**　由题意 $f(0)=1$．方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 两边同时对 x 求导数得

$$y'-1=\mathrm{e}^{x(1-y)}\cdot(1-y-xy'),$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式得 $f'(0)=1$．又因为

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}-0}=f'(0)=1.$$

（8）$y=x+1$．**提示**　方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 两边同时对 x 求导数得

$$\cos(xy)\cdot(xy)'+\frac{(y-x)'}{y-x}=1,$$

从而有

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')+\frac{y'-1}{y-x}=1,$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式得

$$1+\frac{y'(0)-1}{1}=1,$$

解得 $y'(0)=1$，从而曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$．

（9）$y=-2x$．**提示**　方程两边同时对 x 求导数，得

$$(1+y')\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y\cdot y',$$

当 $x=0$，$y=0$ 时，解得 $y'(0)=-2$，故切线方程为 $y=-2x$．

（10）$\sqrt{2}$．**提示**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}=1\cdot\frac{1}{\cos t}=\frac{1}{\cos t},$$

因此 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$．

2.3.2　单项选择题

（1）（C）．**提示**　根据导数的定义

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0,$$

根据极限的保号性可知，存在 $\delta>0$，使得，当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时，

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}>0,$$

因此当 $x\in(0,\delta)$ 时，有 $f(x)>f(0)$，故选项（C）正确．

（2）（A）．**提示**　由题意，$f(0)=0$，且

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}=\lim_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$$

$$=(1-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,.$$

（3）（B）．（4）（D）．（5）（A）．（6）（D）．（7）（C）．（8）（B）．（9）（B）．

（10）（D）．**提示**　由于 $f'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-0}{x}=1$， $f'_{+}(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}}=1$，故选（D）.

2.3.3　结合第二个重要极限和导数的定义，

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{1/n}}=e^{f'(1)}=e^2\,.$$

2.3.4　令 $t=x-1$，则

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2x-1)-f(1)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{f(2t+1)-f(1)}{t}=2\lim_{t\to 0}\frac{f(2t+1)-f(1)}{2t}=2f'(1)\,.$$

所以 $f'(1)=\dfrac{1}{4}$， $f'(-1)=-\dfrac{1}{4}$．

2.3.5　（1）因为 $u(x)$，$v(x)$ 可导，因此根据导数的定义，有

$$u'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\,,\quad v'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\,,$$

因此

$$[u(x)v(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

（2） $f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$ 的导数为

$$f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)\,.$$

2.3.6　由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1+2x)}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2x)-f(1)}{2x}=-2f'(1)=\frac{1}{4}\,,$$

从而 $f'(1)=-\dfrac{1}{8}$．又因为 $f(x)$ 为周期为 5 的周期函数，因此

$$f'(6)=f'(1+5)=f'(1)=-\frac{1}{8}\,.$$

从而曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,1)$ 处的切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{8}(x-6).$$

2.3.7　由于

$$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x),$$

故 $f'(a)=0$．根据二阶导数的定义，有

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)]=2g(a).$$

2.3.8　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可知，因此

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0),$$

从而 $\ln b=0$，解得 $b=1$．又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故 $f'_-(0)=f'_+(0)$，而

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(ax+1)-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a,$$

从而 $a=1$．

2.3.9　结合复合函数求导法则，有

$$y'=\frac{1}{x}f'(\ln x)+\frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$y''=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x^2}f''(\ln x)+\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}.$$

2.3.10　结合复合函数求导法则，有

$$y'=f\left(\frac{\sin x}{x}\right)+x\cdot f'\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y''=f''\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{(x\cos x-\sin x)^2}{x^3}-f'\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\sin x.$$

2.3.11　由于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}\\&=\frac{\cos t\cdot(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2},\end{aligned}$$

因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1,\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{a}.$$

2.3.12　显然 $f(0)=0$，由于

$$f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos(2x)+\cdots+na_n\cos(nx),$$

从而

$$f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na.$$

又因为 $|f(x)|\leqslant|\sin x|\leqslant|x|$，因此当 $x\neq 0$ 时，有

$$-1\leqslant\frac{f(x)}{x}\leqslant 1.$$

而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},$$

根据极限的保号性可知，$-1\leqslant f'(0)\leqslant 1$，从而 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.

2.3.13　等式两边同时对 x 求导数，得

$$\mathrm{e}^x+y+xy'+\mathrm{e}^y\cdot y'=0,$$

上式两边同时再对 x 求导数，得

$$\mathrm{e}^x+y'+y'+xy''+\mathrm{e}^y\cdot(y')^2+\mathrm{e}^y\cdot y''=0,$$

将 $x=0$，$y=0$ 代入上述两个方程，解得

$$y'(0)=-1,\quad y''(0)=0.$$

2.3.14　由题意，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{y'},\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}=-\frac{y''}{(y')^3},$$

故

$$-\frac{y''}{(y')^3}+(y+\sin x)\left(\frac{1}{y'}\right)^3=0,$$

从而有

$$y''-y-\sin x=0.$$

2.3.15　由题意，$f(1)=0$，根据导数的定义，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\right)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\dfrac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}=f'(1)\cdot\frac{1}{x}=\frac{a}{x}.\end{aligned}$$

2.5　综合提高训练

例 2.5.1　已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -1，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=$________.

解　由题意，$f(1)=0$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为

$$y-0=f'(1)(x-1),$$

又因为切线在 y 轴上的截距为 -1，即当 $x=0$ 时，$y=-1$，故 $f'(1)=1$. 结合第二个重要极限和导数的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{1/n}}=\mathrm{e}^{f'(1)}=\mathrm{e}.$$

例 2.5.2　【2013（3）】设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$________.

解　曲线 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率为 $y'\big|_{x=1}=1$，而 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，因此有

$$f(1)=0,\quad f'(1)=1.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\dfrac{2}{n+2}}\cdot\left(-\frac{2n}{n+2}\right)=-2f'(1)=-2.$$

例 2.5.3　【2005（1）】设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，试讨论 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可导性.

解　由于

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x^3|^n}=\max\{1,|x^3|\},$$

即

$$f(x)=\begin{cases}-x^3 & x<-1\\ 1 & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x^3 & x>1\end{cases}.$$

由于

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x^3-1}{x+1}=-1,$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1^-}\frac{1-1}{x+1}=0,$$

故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处不可导，类似地可以证明 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$ 以及 $(1,+\infty)$ 内均为基本初等函数，因而在上述区间内 $f(x)$ 均可导.

第 3 章　中值定理与导数的应用

3.1　知 识 要 点

3.1.1　中值定理

（1）**罗尔中值定理**　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

（2）**拉格朗日中值定理**　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

（3）**柯西中值定理**　若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $g'(x)\neq 0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

推论　若 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒等于零，则 $f(x)$ 在区间 I 上为一个常数.

（4）**泰勒定理**　若 $f(x)$ 在含有 x_0 的一个开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，则对于任意 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 为余项.

当 $x_0=0$ 时的泰勒公式也称为**麦克劳林公式**，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x).$$

拉格朗日余项　$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$，其中 ξ 是介于 x_0 与 x 之间的某个数.

皮亚诺余项　$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]\ (x\to x_0)$.

3.1.2　洛必达法则

洛必达法则主要用来求解 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限，若在自变量的某个变化过程中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋于 0，或者 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋于 ∞，且 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或者 ∞），其中 $g'(x)\neq 0$，则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\ （或者 \infty）.$$

对于一些其他类型的不定式，如 $0\cdot\infty$ 型、$\infty-\infty$ 型、0^0 型、∞^0 型、1^∞ 型等类型需要转化成 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式，再使用洛必达法则进行计算.

3.1.3　函数的单调区间

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则：

（1）若对 $\forall x\in(a,b)$ 有 $f'(x)\geqslant 0$，但等号仅仅在有限个点处成立，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

（2）若对 $\forall x\in(a,b)$ 有 $f'(x)\leqslant 0$，但等号仅仅在有限个点处成立，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

3.1.4　函数的极值

（1）**费马引理**　若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

（2）函数的极值点要么是驻点，要么是函数的不可导点.

（3）**第一充分条件**　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内连续：

1）若在点 x_0 的左邻域内 $f'(x)>0$，在点 x_0 的右邻域内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$；

2）若在点 x_0 的左邻域内 $f'(x)<0$，在点 x_0 的右邻域内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$；

3）若在点 x_0 的某个去心邻域内，$f'(x)$ 不变号，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

（4）**第二充分条件**　设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$；若 $f''(x_0)>0$，$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$.

3.1.5　函数的凹凸区间与拐点

（1）曲线的拐点要么在 $f''(x)=0$ 的点处取到，要么在 $f''(x)$ 不存在的点处取到.

（2）曲线的凹凸性主要通过 $f''(x)$ 的符号来判断，若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

（3）若 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续，$f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在，但 $f''(x)$ 在 x_0 点的两侧异号，则 $(x_0,f(x_0))$ 为图形的拐点.

3.1.6　曲线的渐近线

（1）**水平渐近线**　若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$ 或者 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，则直线 $y=a$ 为函数 $y=f(x)$ 图形的水平渐近线.

（2）**铅垂（垂直）渐近线**　若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或者 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 图形的铅垂渐近线.

（3）**斜渐近线**　若 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 或者 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$，其中 $a\neq 0$，则直线 $y=ax+b$ 为函数 $y=f(x)$ 图形的斜渐近线，其中

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$$

或者

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax].$$

3.1.7 函数作图

函数作图的步骤：

（1）确定函数 $f(x)$ 的定义域，讨论函数的几何特性（如奇偶性、周期性、有界性等），并确定函数的间断点；

（2）求出 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)$、二阶导数 $f''(x)$，以及它们在定义域内的全部零点和不可导点；

（3）由 $f(x)$ 的间断点、驻点、一阶导数不存在的点、二阶导数为零的点及二阶导数不存在的点等将定义域分成若干个区间，在这些区间上分别讨论 $f'(x)$、$f''(x)$ 的符号，确定 $f(x)$ 的增减性与图形的凹凸性，从而确定极值与拐点；

（4）求出 $f(x)$ 的各种渐近线及确定其变化趋势；

（5）补充一些特殊点的函数值，如与坐标轴的交点等；

（6）最后勾画出一张较为精确的函数图形.

3.1.8 曲率、曲率圆与曲率半径

曲率主要用来研究曲线的弯曲程度.设 $f(x)$ 存在二阶导数（此时 $f'(x)$ 连续，因此曲线是光滑的），$y=f(x)$ 在点 $M\big(x,f(x)\big)$ 处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M\big(x,f(x)\big)$ 处的曲率为 K（$K\neq0$），作曲线在点 M 处的法线，在凹向一侧的法线上取一点 D，以 $|DM|=\dfrac{1}{K}$ 为半径，以点 D 为圆心作圆，该圆叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的**曲率圆**，曲率圆的半径 $\rho=\dfrac{1}{K}$ 叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的**曲率半径**.

3.1.9 一些常用的麦克劳林公式

当 $x\to0$ 时，有：

（1）$\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+o(x^n)$；

（2）$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$；

（3）$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$；

（4）$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$；

（5）$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$；

（6）$(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

3.2　典型例题分析

3.2.1　题型一、利用中值定理证明等式问题

例 3.2.1　【2003（3）】设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证　由于 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，故在 $[0,2]$ 上存在最大值 M 和最小值 m，从而

$$3m\leqslant f(0)+f(1)+f(2)\leqslant 3M,$$

即

$$m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1\leqslant M.$$

由连续函数的介值定理可知，至少存在一点 $\xi_1\in[0,2]$，使得 $f(\xi_1)=1$. 又因为 $f(3)=1$，故 $f(x)$ 在 $[\xi_1,3]$ 上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,3)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

例 3.2.2　已知 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f(1)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

证　因为 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，从而

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,$$

且

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$ 可知，至少存在一点 $\xi_1\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)=0$. 又因为 $f'(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 上满足罗尔定理的条件，因此至少存在一点 $\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

例 3.2.3　【1999（3）】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，试证：

（1）存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

（2）对任意的实数 λ，存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

分析　要证明 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$，只需证 $[f'(\xi)-1]-\lambda[f(\xi)-\xi]=0$，注意到

$$[f(x)-x]'=f'(x)-1,$$

因此可构造辅助函数 $F(x)=[f(x)-x]\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

证　（1）构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-x$，显然 $\varphi(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续，且

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0\text{，}\quad \varphi(1)=f(1)-1=-1<0\text{，}$$

由零点定理可知，至少存在一点 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $\varphi(\eta)=0$，即有 $f(\eta)=\eta$．

（2）构造辅助函数 $F(x)=[f(x)-x]\mathrm{e}^{-\lambda x}$，显然 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且

$$F(0)=[f(0)-0]\times 1=0\text{，}\quad F(\eta)=[f(\eta)-\eta]\mathrm{e}^{-\lambda\eta}=0\text{，}$$

因此由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=0$．而

$$F'(x)=[f'(x)-1]\mathrm{e}^{-\lambda x}-\lambda[f(x)-x]\mathrm{e}^{-\lambda x}\text{，}$$

故

$$F'(\xi)=[f'(\xi)-1]\mathrm{e}^{-\lambda\xi}-\lambda[f(\xi)-\xi]\mathrm{e}^{-\lambda\xi}=0\text{，}$$

又因为 $\mathrm{e}^{-\lambda\xi}>0$，从而 $f'(\xi)-1-\lambda[f(\xi)-\xi]=0$，即有 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$．

例 3.2.4　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内至少存在两点 ξ、η，使得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$．

证　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上符合拉格朗日中值定理的条件，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\text{．}$$

另一方面，$f(x)$ 与 $g(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上符合柯西中值定理条件，则至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}\text{．}$$

所以有

$$\frac{(a+b)f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\text{．}$$

从而

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)\text{．}$$

例 3.2.5　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$．证明存在 ξ、$\eta\in(a,b)$，使得 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$．

分析　本题也有两个中值 ξ 和 η，因此也需要利用两次中值定理．首先需要恒等变形，使得含有 ξ,η 的部分分别在等式的一边，再利用中值定理．将等式化为

$$\mathrm{e}^{\eta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=\mathrm{e}^{\xi}\text{，}$$

等式左端可以理解为 $\left[f(x)\mathrm{e}^{x}\right]'\Big|_{x=\eta}$，等式的右端可以理解为 $(\mathrm{e}^{x})\Big|_{x=\xi}$，因此可以考虑使用两次拉格朗日中值定理．

证　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{x},$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上利用拉格朗日中值定理得，存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a),$$

结合 $f(a)=f(b)=1$，整理得

$$\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{a}=\mathrm{e}^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)](b-a).$$

函数 e^{x} 在 $[a,b]$ 上利用拉格朗日中值定理，从而存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{a}=\mathrm{e}^{\xi}(b-a)$．从而 $\mathrm{e}^{\eta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=\mathrm{e}^{\xi}$，即 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$.

3.2.2　题型二、利用中值定理证明不等式问题

例 3.2.6　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，$f(a)=f(b)=0$，且存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)>0$，求证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

证　由于 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上符合拉格朗日中值定理的条件，则至少存在一点 $\xi_1\in(a,c)$，使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0.$$

又由于 $f(x)$ 在 $[c,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则至少存在一点 $\xi_2\in(c,b)$，使得 $f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=\dfrac{-f(c)}{b-c}<0$.

函数 $f'(x)$ 在 $\left[\xi_1,\xi_2\right]$ 上再利用拉格朗日中值定理，则至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

例 3.2.7　设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数，且在 $(0,a)$ 内达到最小值，当 $x\in[0,a]$ 时，$|f''(x)|\leqslant M$，证明 $|f'(0)+f'(a)|\leqslant Ma$.

证　由题意知，$\exists x_0\in(0,a)$，使得 $f'(x_0)=0$，$f'(x)$ 分别在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,a]$ 上利用拉格朗日中值定理，至少存在两点 $\xi_1\in(0,x_0)$ 和 $\xi_2\in(x_0,a)$，使得

$$f'(x_0)-f'(0)=f''(\xi_1)(x_0-0),\quad f'(a)-f'(x_0)=f''(\xi_2)(a-x_0),$$

所以 $\left|f'(0)\right|\leqslant Mx_0$，$\left|f'(a)\right|\leqslant M(a-x_0)$，因此有 $|f'(0)+f'(a)|\leqslant Ma$.

3.2.3　题型三、洛必达法则的应用

例 3.2.8　【**2013（1）**】已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^{k}}=c$，其中 k、c 为常数，且 $c\neq0$，则（　　）.

（A）$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$；　　（B）$k=2,c=\dfrac{1}{2}$；

（C）$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$；　　（D）$k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

解　正确答案为（D），本题可以直接利用洛必达法则进行求解．由于常数 $c\neq0$，且

$$c=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{k(1+x^2)x^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{x^{3-k}}{k(1+x^2)},$$

因此可推知$k=3$，此时$c=\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{3}$.

例 3.2.9　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$，其中$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$.

解

$$\begin{aligned}
原式&=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{nx\left[\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n\right]\right\}\\
&=\lim_{t\to0}\exp\left\{n\cdot\frac{\ln\left(a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t\right)-\ln n}{t}\right\}\\
&=\exp\left\{n\cdot\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t\right)-\ln n}{t}\right\}\\
&=\exp\left\{n\cdot\lim_{t\to0}\frac{a_1^t\ln a_1+a_2^t\ln a_2+\cdots+a_n^t\ln a_2}{a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t}\right\}\\
&=\exp\{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_2\}\\
&=a_1a_2\cdots a_n.
\end{aligned}$$

例 3.2.10　【2011（1）】求极限$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解　由于

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{e^x-1}\ln\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\ln(1+x)-\ln x}{e^x-1}},$$

而

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\ln\ln(1+x)-\ln x}{e^x-1}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\ln(1+x)-\ln x}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{(1+x)\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]\\
&=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x(1+x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x(1+x)+x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{x}{2x(1+x)+x^2}\\
&=-\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)+x}=-\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

因此$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

例 3.2.11　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 a、b、c 均为正数.

解　由于

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}},$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{a^x+b^x+c^x}$$
$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln(abc).$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=\sqrt[3]{abc}.$$

例 3.2.12　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}} & x>0\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的连续性.

解　当 $x=0$ 时，$f(0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；当 $x>0$ 时，

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}.$$

只需计算

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{2x(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\ =f(0)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3.2.4　题型四、函数的凹凸性与拐点问题

例 3.2.13　【2014（1，3）】 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $(0,1)$ 上（　　）.

（A）当 $f'(x)\geqslant 0$ 时， $f(x)\geqslant g(x)$；
（B）当 $f'(x)\geqslant 0$ 时， $f(x)\leqslant g(x)$；
（C）当 $f''(x)\geqslant 0$ 时， $f(x)\geqslant g(x)$；
（D）当 $f''(x)\geqslant 0$ 时， $f(x)\leqslant g(x)$.

解　正确答案为选项（D）. 本题考查了曲线凹凸性的概念. 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，曲线 $f(x)$ 为凹的，如图 3.1 所示.

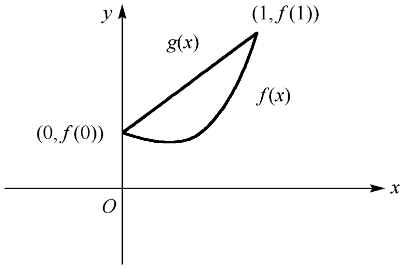


图 3.1

$g(x)$ 为连接点 $(0,f(0))$ 和 $(1,f(1))$ 的直线段，根据凹凸性的定义，显然有 $f(x)\leqslant g(x)$.

本题也可以利用辅助函数方法. 构造辅助函数

$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$,

由于

$$F(0)=F(1)=0,\quad F''(x)=f''(x),$$

因此当 $f''(x)\geqslant 0$ 时， $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是凹的，因此当 $x\in[0,1]$ 时，有 $F(x)\leqslant F(0)=F(1)=0$，从而有 $f(x)\leqslant g(x)$.

例 3.2.14　求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^5}$ 的凹凸区间与拐点.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，

$$f(x)=x^{\frac{8}{3}}-x^{\frac{5}{3}},\quad f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}},\quad f''(x)=\frac{40}{9}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9}\cdot\frac{4x-1}{\sqrt[3]{x}},$$

解得二阶导数等于零的点和二阶导数不存在的点为 $x_1=0$， $x_2=\dfrac{1}{4}$，列表讨论函数的性态，如表 3.1 所示.

表 3.1

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$
$f''(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	∪	拐点为 $(0,\ 0)$	∩	拐点为 $\left(\frac{1}{4},\ -\frac{3}{16\sqrt[3]{16}}\right)$	∪

由表可知，函数 $f(x)$ 的凹区间为 $(-\infty,\ 0]$ 和 $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$，凸区间为 $\left[0,\ \dfrac{1}{4}\right]$；拐点为 $(0,0)$ 和 $\left(\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{3}{16\sqrt[3]{16}}\right)$.

例 3.2.15　【2007（3）】求 $y=y(x)$ 是由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定的隐函数，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

解　等式 $y\ln y-x+y=0$ 两边同时对 x 求导数，得

$$y'\ln y+y'-1+y'=0,$$

解得 $y'=\dfrac{1}{2+\ln y}$，故

$$y''=\frac{\frac{y'}{y}}{(2+\ln y)^2}=-\frac{1}{y(2+\ln y)^3}.$$

由于 $y''\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{8}$，且 y'' 在点 $(1,1)$ 的附近是连续函数，故根据连续函数的性质可知，在 $x=1$ 的某个邻域内有 $y''<0$，从而曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近是凸的.

3.2.5　题型五、显式不等式的证明问题

证明不等式的常用方法有四种：一是利用中值定理证明不等式；二是利用单调性证明不等式；三是利用极值思想证明不等式；四是利用凹凸性证明不等式.

例 3.2.16　证明：当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证　设 $f(t)=\ln(1+t)$，显然 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，因此有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)\qquad(0<\xi<x).$$

因为 $f(0)=0$，$f'(t)=\frac{1}{1+t}$，所以

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi},$$

其中 $0<\xi<x$. 所以

$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x,\ \text{即}\ \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

例 3.2.17　证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$.

证　设 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$，显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上连续，且在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x),$$

要想证明 $f'(x)>0$，只需证明在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上，$g(x)=\tan x-x>0$ 即可. 由于 $g(x)=\tan x-x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上连续，$g(0)=0$，而在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且

$$g'(x)=\sec^2 x-1=\tan^2 x>0,$$

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，因此 $g(x)>g(0)=0$，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，有 $f(x)>f(0)=0$，即

$$\tan x-x-\frac{1}{3}x^3>0.$$

所以在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，有 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$.

例 3.2.18　证明不等式 $e^{\pi}>\pi^{e}$.

分析　$e^{\pi}>\pi^{e}\Leftrightarrow\dfrac{e^{\pi}}{\pi^{e}}>1$　或　$e^{\pi}>\pi^{e}\Leftrightarrow\pi>e\ln\pi\Leftrightarrow\pi-e\ln\pi>0$.

证法 1　构造辅助函数 $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{e}}$，有

$$f(e)=\frac{e^{e}}{e^{e}}=1,\quad f'(x)=\frac{x^{e}e^{x}-ex^{e-1}e^{x}}{x^{2e}}=\frac{x^{e-1}e^{x}(x-e)}{x^{2e}}.$$

当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 内连续且单调增加，$f(e)$ 为最小值.

因此 $f(\pi)>f(e)$，即 $\dfrac{e^{\pi}}{\pi^{e}}>1$，所以有 $e^{\pi}>\pi^{e}$.

证法 2　构造辅助函数 $f(x)=x-e\ln x\quad(x>0)$，由于 $f'(x)=1-\dfrac{e}{x}$，令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x=e$，又因为 $f''(x)=\dfrac{e}{x^{2}}>0$，故 $f''(e)>0$，因此函数 $f(x)$ 在 $x=e$ 处取得最小值，从而 $f(\pi)>f(e)$，即有 $\pi-e\ln\pi>0$，所以有 $e^{\pi}>\pi^{e}$.

例 3.2.19　【2012（1，3）】证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^{2}}{2}\quad(-1<x<1)$.

证　令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^{2}}{2}$，$-1<x<1$. 由于

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\sin x-x,$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+x\left(-\frac{1}{(1+x)^{2}}+\frac{1}{(1-x)^{2}}\right)-\cos x-1\\&=\frac{4}{(1-x^{2})^{2}}-\cos x-1,\end{aligned}$$

因此当 $-1<x<1$ 时，$f''(x)>4-1-1=2>0$，故 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单调递增. 由于 $f'(0)=0$，从而当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的最小值点，最小值为 $f(0)=0$. 因此对任意的 $x\in(-1,1)$，有

$$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^{2}}{2}\geqslant f(0)=0,$$

从而 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^{2}}{2}$，结论得证.

例 3.2.20　证明对于 $\forall x,y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，有 $\cos\dfrac{x+y}{2}>\dfrac{\cos x+\cos y}{2}$.

证　显然函数 $f(t)=\cos t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续、可导，且

$$f'(t)=-\sin t,\quad f''(t)=-\cos t,$$

当 $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f''(t)=-\cos t<0$，因此 $f(t)=\cos t$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内为凸的，则有 $\forall x,y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，有 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)>\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$，即 $\cos\dfrac{x+y}{2}>\dfrac{\cos x+\cos y}{2}$.

3.2.6　题型六、函数的零点（方程的根）问题

例 3.2.21　证明方程$1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}=0$有且仅有一个实根.

证　令$f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$．因为$f(x)$在$[0,2]$上连续，且$f(0)=1>0$，$f(2)=-\frac{5}{3}<0$，由零点定理可知，至少存在一点$\xi\in(0,2)$，使得$f(\xi)=0$，从而方程$f(x)=0$至少有一个实根．又因为

$$f'(x)=-1+x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0,$$

故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递减，从而方程$f(x)=0$至多有一个实根，综上$f(x)=0$有且仅有一个实根.

例 3.2.22　讨论函数$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$的零点.

解　当$x<1$时，$f(x)<0$；当$x>3$时，$f(x)>0$，所以$f(x)$在$(-\infty,1)$和$(3,+\infty)$内无零点．当$x\in(1,3)$时，对函数求导得

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-3)^2},$$

在$(1,2)$与$(2,3)$内，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(1,2)$和$(2,3)$内均单调减少．又因为

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)=-\infty,$$

所以在$(1,2)$内，函数$f(x)$有一个零点．同理在$(2,3)$内，函数$f(x)$有一个零点．因此$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有两个零点，分别在$(1,2)$与$(2,3)$内.

3.2.7　题型七、渐近线问题

例 3.2.23　确定函数$f(x)=\frac{1}{x-1}+\ln(1+\mathrm{e}^{x-1})$的渐近线.

解　由于

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{x-1}+\ln(1+\mathrm{e}^{x-1})\right]=\infty,$$

因此曲线有一条铅垂渐近线$x=1$．又因为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-1}+\ln(1+\mathrm{e}^{x-1})\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x-1}+\ln(1+\mathrm{e}^{x-1})\right]=0,$$

因此曲线有一条水平渐近线$y=0$．下面讨论$f(x)$的斜渐近线.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x(x-1)}+\frac{\ln(1+e^{x-1})}{x}\right],$$

显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(x-1)}=0$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{x-1})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}}{1+e^{x-1}}=1,$$

因此 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$．而

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-1}+\ln(1+e^{x-1})-x\right],$$

显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$，又因为

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{x-1})-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{x-1})-\ln e^{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^{x-1}}{e^{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e}\right)=-1,$$

即 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-1$，故曲线有一条斜渐近线 $y=x-1$．

注　对于函数 $y=f(x)$ 而言，在同一个水平方向上 ($x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$)，水平渐近线和斜渐近线不可能同时存在．由于本题当 $x\to-\infty$ 时存在水平渐近线，故函数 $y=f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 方向上不存在斜渐近线．

例 3.2.24　求 $y=f(x)=(1+x)e^{1-\frac{1}{x}}$ 的渐近线方程.

解　由于

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(1+x)e^{1-\frac{1}{x}}=\infty,$$

因此 $y=f(x)$ 没有水平渐近线，可能存在斜渐近线.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(1+x)e^{1-\frac{1}{x}}=+\infty,$$

因此 $y=f(x)$ 有一条垂直渐近线 $x=0$．又因为

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{x}e^{1-\frac{1}{x}}=e,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ex]=\lim_{x\to\infty}\left((1+x)e^{1-\frac{1}{x}}-ex\right)=\lim_{x\to\infty}e^{1-\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\left(xe^{1-\frac{1}{x}}-ex\right)$$

$$=e+\lim_{x\to\infty}ex\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)=e+\lim_{x\to\infty}ex\left(-\frac{1}{x}\right)=0,$$

因此 $y=f(x)$ 有一条斜渐近线 $y=ex$．

3.2.8　题型八、泰勒公式的应用问题

例 3.2.25　【2015（1，3）】设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a、b、k 的值.

解　当 $x\to 0$ 时，有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\text{，}\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\text{.}$$

因此当 $x\to 0$ 时，有

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x=(a+1)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)\text{.}$$

由于当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，故

$$a+1=0\text{，}\ b-\frac{a}{2}=0\text{，}\ \frac{a}{3}=k\text{，}$$

解得 $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{2}$，$k=-\dfrac{1}{3}$.

例 3.2.26　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解　可以使用泰勒公式求极限，因为

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4)\text{，}$$

而

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\text{，}$$

所以

$$\begin{aligned}e^{x^2}+2\cos x-3&=\left[1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4)\right]+2\left[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right]-3\\&=\frac{7}{12}x^4+o(x^4)\text{，}\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}\text{.}$$

例 3.2.27　【2008（1）】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

解　当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\text{，}$$

$$\begin{aligned}\sin(\sin x)&=\sin x-\frac{1}{3!}\sin^3 x+o(\sin^3 x)=x-\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\\&=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\text{，}\end{aligned}$$

因此

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{3!}x^3-\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

3.2.9　题型九、曲率问题

例 3.2.28　求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(0<b<a)$ 的曲率与曲率半径.

解　由于

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$y''=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y+x\cdot\frac{b^2x}{a^2y}}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3},$$

因此曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{\frac{b^4}{a^2|y^3|}}{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{3/2}}=\frac{b^4}{a^2|y^3|}\cdot\left(\frac{a^4y^2}{a^4y^2+b^4x^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^4b^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

例 3.2.29　求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$ 在一拱 $(0<t<2\pi)$ 内的曲率半径的最大值.

解　由于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}$$

$$=\frac{\cos t\cdot(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2},$$

因此曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=a(1-\cos t)^2\cdot\left(1+\frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=2\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}=4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|,$$

当 $t=\pi$ 时，曲率半径得到最大，最大值为 $4a$.

3.3　深 化 训 练

3.3.1　填空题

（1）函数 $f(x)=\sin^2 x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上满足罗尔中值定理，则 $\xi=$________.

（2）【2010（3）】若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$________.

（3）【2008（3）】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=$________.

（4）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$ 与 $f(1)-f(0)$ 的大小关系为________.

3.3.2　单项选择题

（1）【2014（3）】设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$．当 $x\to 0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是（　　）.

（A）$a=0$；　（B）$b=1$；　（C）$c=0$；　（D）$d=\dfrac{1}{6}$.

（2）【2009（1，3）】当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin(ax)$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　　）.

（A）$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$；　（B）$a=1,b=\dfrac{1}{6}$；

（C）$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$；　（D）$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

（3）【2000（1）】设 $f(x)$，$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则 $a<x<b$ 时，有（　　）.

（A）$f(x)g(b)>f(b)g(x)$；　（B）$f(x)g(a)>f(a)g(x)$；

（C）$f(x)g(x)>f(b)g(b)$；　（D）$f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

（4）【2003（1）】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图 3.2 所示，则 $f(x)$ 有（　　）.

（A）一个极小值点和两个极大值点；　（B）两个极小值点和一个极大值点；

（C）两个极小值点和两个极大值点；　（D）三个极小值点和一个极大值点.

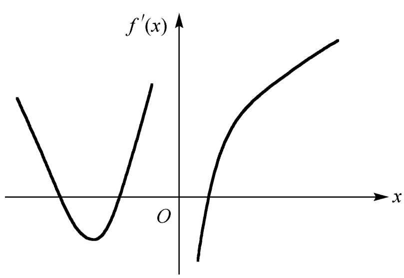


图 3.2

（5）【2015（1，3）】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如图 3.3 所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为（　　）.

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3．

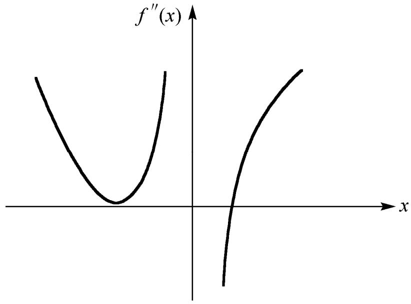


图 3.3

（6）【2013（3）】函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（　　）．

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3．

（7）设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二次可微，且 $xf''(x)-f'(x)>0$，则 $\dfrac{f'(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 内是（　　）．

（A）单调不增；　（B）单调不减；　（C）单调增加；　（D）单调减少．

（8）【2011（1）】曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是（　　）．

（A）$(1,0)$；　（B）$(2,0)$；　（C）$(3,0)$；　（D）$(4,0)$．

（9）【2006（1）】设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　　）．

（A）$0<\mathrm{d}y<\Delta y$；　（B）$0<\Delta y<\mathrm{d}y$；

（C）$\Delta y<\mathrm{d}y<0$；　（D）$\mathrm{d}y<\Delta y<0$；

（10）【2012（1，3）】曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为（　　）．

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3．

（11）【2014（1，3）】下列曲线中有渐近线的是（　　）．

（A）$y=x+\sin x$；　（B）$y=x^2+\sin x$；

（C）$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$；　（D）$y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$．

（12）【2007（1）】曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线的条数为（　　）．

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3．

3.3.3　设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$．

3.3.4　【2009（1，3）】（1）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$．

（2）若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)$ 内可导，其中 $\delta>0$，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$．

3.3.5　【2005（1）】已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$

证明：（1）存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（2）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

3.3.6　求解下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$；　（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

（3）【2012（3）】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$；　（4）【2010（3）】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

3.3.7　证明当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

3.3.8　【2004（1，2）】设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

3.3.9　【2013（3）】当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

3.3.10　证明方程 $1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}=0$ 无实根.

3.3.11　【2011（3）】证明：方程 $4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有 2 个实根.

3.3.12　【2001（3）】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

试求 c 的值.

3.3.13　求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}$ 的单调区间、极值.

3.3.14　求函数 $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$ 的单调区间、极值、凹凸区间、拐点以及渐近线.

3.4　深化训练详解

3.3.1　填空题

（1）0.　（2）3.

（3）$-\dfrac{1}{6}$. **提示**　结合等价无穷小量替换方法和洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\sin x-x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

（4）$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$.

3.3.2　单项选择题

（1）（D）. **提示**　利用麦克劳林展开，有 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，从而

$$p(x)-\tan x=a+(b-1)x+cx^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)x^3=o(x^3).$$

故 $a=0$， $b=1$， $c=0$， $d=\dfrac{1}{3}$．

本题也可以利用洛必达法则求解．由于 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{a+bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=0.$$

可推知 $\lim\limits_{x\to 0}(a+bx+cx^2+dx^3-\tan x)=0$，解得 $a=0$．由洛必达法则可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{b+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}=0,$$

可推知 $\lim\limits_{x\to 0}(b+2cx+3dx^2-\sec^2 x)=0$，解得 $b=1$．因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2cx+3dx^2-\tan^2 x}{3x^2}=0,$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2c}{3x}+d-\frac{\tan^2 x}{3x^2}\right)=0,$$

因此 $c=0$， $d=\dfrac{1}{3}$．

（2）（A）．**提示**　利用麦克劳林展开，当 $x\to 0$ 时， $\sin(ax)=ax-\dfrac{a^3}{3!}x^3+o(x^3)$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(ax)}{x^2\ln(1-bx)}=-\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x+\dfrac{a^3}{3!}x^3+o(x^3)}{bx^3},$$

因此

$$1-a=0,\ -\frac{a^3}{3!b}=1,$$

解得 $a=1$， $b=-\dfrac{1}{6}$．

（3）（A）．**提示**　由于

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0,$$

故当 $a<x<b$ 时，有

$$\frac{f(a)}{g(a)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(b)}{g(b)}.$$

（4）（C）．根据图 3.2 可知，设 $f'(x)$ 与 x 轴的交点从左到右分别为 a、b、c，则 $f(x)$ 有三个驻点 $x=a$， $x=b$， $x=c$ 以及一个不可导点 $x=0$，根据四个点两侧 $f'(x)$ 的符号可以判断 $x=a$， $x=0$ 为极大值点， $x=b$， $x=c$ 为极小值点．故选项（C）正确．

（5）（C）.

（6）（C）. **提示**　$x=0$，$x=-1$，$x=1$ 为间断点．由洛必达法则可知 $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x|=0$，又因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1,$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2},$$

因此 $x=0$，$x=1$ 为可去间断点.

（7）（C）.

（8）（C）. **提示**　由于函数 $y=y(x)$ 是一个10次的多项式，因此曲线在 $(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$ 内要么是凹的，要么是凸的．又因为

$$\frac{f(1)+f(2)}{2}=0>f\left(\frac{1+2}{2}\right),$$

$$\frac{f(2)+f(3)}{2}=0>f\left(\frac{2+3}{2}\right),$$

$$\frac{f(3)+f(4)}{2}=0<f\left(\frac{3+4}{2}\right),$$

因此可知曲线在 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 内是凹的，在 $(3,4)$ 内是凸的，因此 $(3,0)$ 点为曲线的拐点.

（9）（A）. **提示**　显然 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上单调递增，且是凹的，由几何意义易知选项（A）正确.

（10）（C）.　　（11）（C）.

（12）（D）. **提示**　由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0,$$

因此曲线有一条水平渐近线 $y=0$．由于

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty,$$

因此曲线有一条铅垂渐近线 $x=0$．又因为

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[y-ax]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-\ln e^x]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=0,$$

因此曲线有一条斜渐近线 $y=x$.

3.3.3　构造辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{g(x)}\cdot f(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，故由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$．又因为

$$F'(x)=\mathrm{e}^{g(x)}\cdot f'(x)+\mathrm{e}^{g(x)}\cdot g'(x)\cdot f(x),$$

故 $[f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)]\mathrm{e}^{g(\xi)}=0$，而 $\mathrm{e}^{g(\xi)}>0$，从而 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$．

3.3.4　（1）构造辅助函数

$$F(x)=[f(b)-f(a)]x-f(x)(b-a),$$

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=[f(b)-f(a)]a-f(a)(b-a)=af(b)-bf(a),$$

$$F(b)=[f(b)-f(a)]b-f(b)(b-a)=af(b)-bf(a),$$

从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，而 $F'(x)=f(b)-f(a)-f'(x)(b-a)$，从而

$$f(b)-f(a)-f'(\xi)(b-a)=0,$$

即 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，结论得证．

（2）根据拉格朗日中值定理，有 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，其中 $0<\xi<x$，故

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}f'(\xi)=\lim_{\xi\to0^+}f'(\xi)=A.$$

3.3.5　（1）构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)+x-1$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$\varphi(0)=-1<0,\quad \varphi(1)=1>0,$$

由零点定理可知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\varphi(\xi)=0$，即有 $f(\xi)=1-\xi$．

（2）由题意可知，$f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 上连续，在 $(0,\xi)$ 内可导，由拉格朗日中值定理可知，存在一点 $\eta\in(0,\xi)$，使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi}.$$

类似地，$f(x)$ 在 $[\xi,1]$ 上连续，在 $(\xi,1)$ 内可导，由拉格朗日中值定理可知，存在一点 $\zeta\in(0,\xi)$，使得

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}.$$

因此存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

3.3.6　（1）原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[-\frac{1}{x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{-t+\ln(1+t)}{t^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{-1+\frac{1}{1+t}}{2t}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{-t}{2t(1+t)}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

（2）原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-(x^x)'}{-1+\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-(\mathrm{e}^{x\ln x})'}{-1+\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)}{-1+\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)}{1-x}\cdot x=\lim_{x\to1}\frac{1-\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)^2-\mathrm{e}^{x\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}}{-1}=2\text{ .}$$

（3）结合等价无穷小量和洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{2-2\cos x}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{2-2\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2}x^2}{6x^2}=\frac{1}{12}.$$

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\left\{\dfrac{1}{\ln x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}\right\}$，

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'}{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}}{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1-\ln x}{x}}{\dfrac{\ln x}{x}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=-1,$$

因此原式$=\mathrm{e}^{-1}$.

3.3.7　**证法 1**　构造辅助函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}.$$

显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. 又记 $g(x)=x\cos x-\sin x$ ，则 $g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，

$$g'(x) = -x\sin x < 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少，因此当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$g(0)>g(x)$，即 $g(x)<0$，从而有 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少的，即当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(0)>f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，即

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}},$$

从而 $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$，结论得证.

证法 2　当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，不等式 $\frac{\sin x}{x}<1$ 显然成立，这里只证明不等式 $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}$．构造辅助函数

$$f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$，令 $f'(x)=0$，解得唯一驻点 $x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$，又因为 $f''(x)=-\sin x$，因此 $f''(x_0)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$ 处取得唯一极大值．由于 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，因此一定存在最大值和最小值，且最小值只能在 $x=0$ 或 $x=\frac{\pi}{2}$ 处取到．而 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，故当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $\sin x-\frac{2}{\pi}x$，从而有 $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}$ 成立.

3.3.8　令 $f(x)=\ln^2 x$，显然 $f(x)$ 在 $[a,b]\subset(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，利用拉格朗日中值定理可知，

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),$$

其中 $\mathrm{e}<a<\xi<b<\mathrm{e}^2$．设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，当 $x\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$ 时，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，所以函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上单调递减，因此有

$$\frac{2}{\mathrm{e}^2}=\frac{\ln\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}<\frac{\ln\xi}{\xi}<\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

因此有

$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a).$$

3.3.9　根据等价无穷小量的定义，有

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cos(3x)}{ax^n}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos(2x)\cos(3x)+2\cos x\sin(2x)\cos(3x)+3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{anx^{n-1}},$$

由于当 $n=2$ 时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos(2x)\cos(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{1}{2a},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin(2x)\cos(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{4}{2a},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{9}{2a},$$

因此 $\frac{1+4+9}{2a}=1$，解得 $a=7$．当 $n\neq 2$ 时，显然不符合题意．故 $n=2$，$a=7$．

3.3.10　令 $f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$．由于

$$f'(x)=-1+x-x^2+x^3=(x-1)+x^2(x-1)=(x-1)(x^2+1),$$

令 $f'(x)=0$，解得唯一驻点 $x=1$．又因为 $f''(x)=1-2x+3x^2$，从而 $f''(1)>0$，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值，最小值为

$$f(1)=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>0,$$

故对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(x)\geqslant f(1)>0$，故 $f(x)=0$ 无实根．

3.3.11　构造辅助函数 $f(x)=4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$．则

$$f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1.$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3}$．

当 $x\in(-\infty,-\sqrt{3})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{3}]$ 内单调递减；

当 $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ 内单调递增；

当 $x\in(-\sqrt{3},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 内单调递减．

因此 $f(x)$ 在 $x_1=-\sqrt{3}$ 处取得极小值 $f(-\sqrt{3})=0$，在 $x_2=\sqrt{3}$ 处取得极大值 $f(\sqrt{3})=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,\sqrt{3}]$ 内有且仅有一个零点 $x_1=-\sqrt{3}$．又因为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=-\infty,$$

因此存在一点 $x_3>\sqrt{3}$，使得 $f(x_3)<0$．由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(\sqrt{3},x_3)$，使得 $f(\xi)=0$，从而 $f(x)$ 在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 内有且仅有一个零点．

综上，方程 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有 2 个实根．

3.3.12　由拉格朗日中值定理可知，至少存在一点 $\xi \in (x-1,x)$，使得
$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi),$$
因此
$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}.$$
由题意，显然 $c\neq 0$，又因为
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}\cdot\frac{2cx}{x-c}}=\mathrm{e}^{2c},$$
因此 $2c=1$，解得 $c=\dfrac{1}{2}$.

3.3.13　函数 $f(x)=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}=(2x-x^2)^{\frac{2}{3}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且
$$f'(x)=\frac{4}{3}(2x-x^2)^{-\frac{1}{3}}(1-x)=\frac{4(1-x)}{3\cdot\sqrt[3]{x(2-x)}},$$
$x=1$ 为函数的驻点，$x=0$ 与 $x=2$ 为导数不存在的点，列表，如表 3.2 所示.

表 3.2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	—	不存在	+	0	—	不存在	+
$f(x)$	↘	极小值 0	↗	极大值 1	↘	极小值 0	↗

由表 3.2 可知，$f(x)$ 的单调递增区间为 $[0,1]$ 和 $[2,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0]$ 和 $[1,2]$；极大值为 $f(1)=1$，极小值为 $f(0)=0$.

3.3.14　定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.
$$y'=\frac{4x(1-x)^2+4x^2(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{4x(1-x)+4x^2}{(1-x)^3}=\frac{4x}{(1-x)^3},$$
$$y''=\frac{4(1-x)^3+12x(1-x)^2}{(1-x)^6}=\frac{4-4x+12x}{(1-x)^4}=\frac{4+8x}{(1-x)^4},$$
显然，$x=0$ 为函数的驻点，当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，二阶导数为零. 列表，如表 3.3 所示.

表 3.3

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	—	—	—	0	+	—
$f''(x)$	—	0	+	+	+	+
$f(x)$	↘∩	$\frac{2}{9}$	↘∪	极小值 0	↗∪	↘∪

由表可知，$f(x)$ 的单调递增区间为 $[0,1)$，单调递减区间为 $(-\infty,0]$ 和 $(1,+\infty)$；极小值 $f(0)=0$，$f(x)$ 的凹区间为 $\left[-\dfrac{1}{2},1\right)$ 和 $(1,+\infty)$，$f(x)$ 的凸区间为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$，拐点为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{9}\right)$. 又

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}=2$，所以 $y=2$ 为水平渐近线；因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}=\infty$，所以直线 $x=1$ 为 $f(x)$ 的铅垂渐近线.

3.5　综合提高训练

例 3.5.1　【2007（1）】设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证　构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，则 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. 由于 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 内存在相等的最大值，不妨设最大值为 M，则存在 $x_1\in(a,b)$，$x_2\in(a,b)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=M$.

若 $x_1=x_2$，则取 $\eta=x_1$，即有 $\varphi(\eta)=0$. 若 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，则

$$\varphi(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=M-g(x_1)\geqslant0,$$

$$\varphi(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-M\leqslant0,$$

由介值定理可知，存在一点 $\eta\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使得 $\varphi(\eta)=0$.

由罗尔定理可知，至少存在两点 $\xi_1\in(a,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,b)$，使得

$$\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0.$$

由题意 $\varphi'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上利用罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$，结论得证.

例 3.5.2　【2013（1）】设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

（2）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

解　（1）由于 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f(0)=0$. 构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-x$，显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$，由罗尔定理可知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，从而有 $f'(\xi)=1$.

（2）构造辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)-1]$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 又因为 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f'(x)$ 为偶函数，从而根据（1）可知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=f'(-\xi)=1,$$

故有 $F(-\xi)=F(\xi)=0$，由罗尔定理可知，存在点 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得 $F'(\eta)=0$. 又因为

$$F'(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)-1]+\mathrm{e}^xf''(x)=\mathrm{e}^x[f''(x)+f'(x)-1],$$

因此有 $\mathrm{e}^\eta[f''(\eta)+f'(\eta)-1]=0$，故有 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

例 3.5.3　【2013（3）】设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. 证明：

（1）存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；

（2）对（1）中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

证　（1）由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，根据极限的性质可知，存在 $b>0$，使得 $f(b)>1$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，从而 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上连续，由连续函数的介值定理可知，存在 $a\in(0,b)$，使得 $f(a)=1$.

（2）**证法 1** 构造辅助函数$\varphi(x)=f(x)-\dfrac{1}{a}x$，显然$\varphi(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且

$$\varphi(0)=f(0)-0=0\text{，}\quad \varphi(a)=f(a)-1=0\text{，}$$

根据罗尔定理，至少存在一点$\xi\in(0,a)$，使得$\varphi'(\xi)=0$，从而$\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{a}$，故有$f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

证法 2 因为$f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，根据拉格朗日中值定理可知，存在一点$\xi\in(0,a)$，使得

$$f(a)-f(0)=f'(\xi)(a-0)\text{，}$$

由$f(0)=0$，$f(a)=1$可知，$f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$，结论得证.

例 3.5.4 设$f(x)$在$x=0$的某个邻域内有连续的二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3\text{，}$$

求$f(0)$，$f'(0)$以及$f''(0)$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=\mathrm{e}^3.$$

所以等价无穷小替换得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=3.$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+f(x)}{x^2}=3.$$

根据极限与无穷小的关系有$\dfrac{x^2+f(x)}{x^2}=3+\alpha_1\quad(x\to 0)$，其中$\alpha_1$为无穷小量，因此有$f(x)=(3+\alpha_1)x^2-x^2$．由$f(x)$的连续性可知，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$．由洛必达法则知

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+f'(x)}{2x}=3\text{，}$$

因此有$f'(x)=2x(3+\alpha_2)-2x\ (x\to 0)$．由$f'(x)$的连续性知，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$．结合洛必达法则和$f''(x)$在$x=0$处的连续性，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2+f''(x)}{2}=\frac{2+f''(0)}{2}=3\text{，}$$

所以$f''(0)=4$.

例 3.5.5 【2011 年北京市竞赛题】 设$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(0)=0$，证明函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ f'(0) & x=0\end{cases}$$

具有一阶连续导数.

证　当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$；在 $x=0$ 处，利用导数的定义，有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0),$$

即有 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=g'(0)$，因此 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，结合 $f''(x)$ 的连续性可知，函数 $g'(x)$ 处处连续，结论得证.

例 3.5.6　已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{\sin x}{x^2}\right]=1$，试求 $f'(0)$.

解　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}+f(x)}{x}=1$，可知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}+f(x)\right]=0$，从而

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1.$$

又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因此 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$.

$$1=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}+\frac{\sin x}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)+1}{x}+\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)+1}{x}+\frac{\sin x-x}{x^2}\right]$$
$$=f'(0)+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=f'(0)+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=f'(0)+\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=f'(0),$$

所以 $f'(0)=1$.

例 3.5.7　**【2011（1）】**求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

解　令 $f(x)=k\arctan x-x$，显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为奇函数，$f(0)=0$，且

$$f'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1.$$

当 $k\leqslant 1$ 时，$f'(x)<0$（$x\neq 0$），因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递减，故 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有且仅有一个实根.

当 $k>1$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=\sqrt{k-1}$，$x_2=-\sqrt{k-1}$．当 $x\in(0,\sqrt{k-1})$ 时，$f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 单调递增，当 $x\in(\sqrt{k-1},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 单调递减，故 $f(x)$ 在 $x_1=\sqrt{k-1}$ 处取得最大值，且

$$f(\sqrt{k-1}) > f(0) = 0,$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(k\arctan x - x) = -\infty$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个实根．由于 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内有且仅有一个实根，综上，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有且仅有三个实根．

例 3.5.8　【2014（1）】设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值．

解　方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 两边同时对 x 求导数，得

$$3y^2\cdot y' + y^2 + 2xy\cdot y' + 2xy + x^2\cdot y' = 0,$$

令 $y'=0$，解得 $y=-2x$ 或 $y=0$（不适合原方程，舍去）．将 $y=-2x$ 代入原方程解得 $x=1$，$y=-2$．由方程 $3y^2\cdot y'+y^2+2xy\cdot y'+2xy+x^2\cdot y'=0$ 解得

$$y' = -\frac{y^2+2xy}{3y^2+2xy+x^2},$$

因此

$$y'' = -\frac{(2y\cdot y'+2y+2x\cdot y')(3y^2+2xy+x^2)-(y^2+2xy)(6y\cdot y'+2y+2xy'+2x)}{(3y^2+2xy+x^2)^2},$$

将 $y'=0$，$x=1$，$y=-2$ 代入 y'' 得 $y''(1)=\dfrac{4}{9}>0$，因此函数在 $x=1$ 处取得极小值，极小值为 -2．

第 4 章　不 定 积 分

4.1　知 识 要 点

4.1.1　不定积分的定义与性质

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在函数 $F(x)$，使得在区间 I 上处处有

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x\,,$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**.

函数 $f(x)$ 的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示的是 $f(x)$ 的全体原函数，若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C\,.$$

不定积分具有如下性质：

（1）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　或　$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$；

（2）$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$　或　$\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$；

（3）$\int\left[af(x)+bg(x)\right]\mathrm{d}x=a\int f(x)\mathrm{d}x+b\int g(x)\mathrm{d}x$.

4.1.2　换元积分法

换元积分法分为第一类换元积分法（凑微分法）和第二类换元积分法，两类换元积分法的主要区别是，第一类换元积分法可以理解为先凑微分再做变量替换，第二类换元积分法是直接变量替换.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则第一类换元积分法的思路为：

$$\begin{aligned}\int g(x)\mathrm{d}x&=\int f\left[\varphi(x)\right]\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)\xlongequal{u=\varphi(x)}\int f(u)\mathrm{d}u\\&=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C.\end{aligned}$$

第二类换元积分法的思路为：

$$\int g(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=\varphi(t)}\int g\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F[\varphi^{-1}(x)]+C\,.$$

在第二类换元积分法中，还需要读者重视的几种常用的换元法有：

（1）若被积函数同时含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[m]{ax+b}$，可令 $t=\sqrt[N]{ax+b}$，其中 N 为 n 和 m 的最小公倍数.

（2）若被积函数含有二次根式 $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$，可令 $x=a\sin t$，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（3）若被积函数含有二次根式 $\sqrt{a^2+x^2}$ $(a>0)$，可令 $x=a\tan t$，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（4）若被积函数含有二次根式 $\sqrt{x^2-a^2}$ $(a>0)$，当 $x>a$ 时，可令 $x=a\sec t$，$t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x<-a$ 时，可令 $u=-x$.

（5）当被积函数分母中含有 x 的高次幂时，可用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$.

4.1.3　分部积分法

分部积分法主要用于求解乘积类型的积分. 设 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 具有连续导数，则有

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u .$$

分部积分法的本质是将难于计算的积分 $\int u\mathrm{d}v$ 转化为容易计算的积分 $\int v\mathrm{d}u$，因此在使用该公式时需要选择好 u 和 v，或者说关键是选择哪个函数凑微分. 常用的凑微分思路有以下三种：

（1）幂函数与指数函数、三角函数相乘时，指数函数、三角函数凑微分；

（2）幂函数与对数函数、反三角函数相乘时，幂函数凑微分；

（3）指数函数与三角函数相乘时，哪一个凑微分都可以，使用循环积分法.

4.1.4　有理函数积分法

利用多项式的除法可以将有理函数的积分转化为多项式与真分式的积分，而通过真分式的分解可以将真分式的积分转化为如下 4 类简单真分式（部分分式）的积分：

（1）$\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x$；　　（2）$\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x$ $(n>1)$；

（3）$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$ $(p^2-4q<0)$；　　（4）$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$ $(p^2-4q<0, n>1)$.

将真分式分解为部分分式之和时，若真分式的分母中含有因式 $(x-a)^k$，则分解后的式子应该含有如下表达式

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k};$$

若真分式的分母中含有因式 $(x^2+px+q)^k$ $(p^2-4q<0)$，则分解后的式子应该含有如下表达式

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k} .$$

4.1.5　三角函数有理式的积分法

对于三角函数有理式的积分，主要积分方法有如下几种.

（1）对于 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 型，如果没有简易的求解方法，可以尝试利用**万能替换**方法进行求解，即令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

（2）对于 $\int\sin mx\cdot\sin nx\mathrm{d}x$，$\int\sin mx\cdot\cos nx\mathrm{d}x$，$\int\cos mx\cdot\cos nx\mathrm{d}x$ $(m\neq n)$ 类型，可利用积化和差来计算.

（3）对于$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \mathrm{d}x$类型，若当$m$、$n$中有一个奇数，可拆开利用凑微分法来计算；若$m$、$n$都是偶数，可利用倍角公式逐步求出不定积分.

（4）对于$\int \sin^m x \mathrm{d}x$，$\int \cos^n x \mathrm{d}x$类型，可利用分部积分法导出递推公式计算，也可按方法（3）的特例进行处理.

4.1.6　简单无理函数的积分法

简单无理函数是指形式如$R(x, \sqrt[n]{ax+b})$，$R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$类型的函数，关键是找出适当的变量代换去掉根号，化为有理函数的积分.

4.1.7　常用积分公式表

（1）$\int 0 \,\mathrm{d}x = C$；

（2）$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$；

（3）$\int \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C$；

（4）$\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a} a^x + C \ (a > 0, a \neq 1)$；

（5）$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$；

（6）$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$；

（7）$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$；

（8）$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；

（9）$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

（10）$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；

（11）$\int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

（12）$\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$；

（13）$\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$；

（14）$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$；

（15）$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$；

（16）$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \ (a > 0)$；

（17）$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin \dfrac{x}{a} + C \ (a > 0)$；

（18）$\int \dfrac{1}{a^2 + x^2} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C \ (a > 0)$；

（19）$\int \dfrac{1}{a^2 - x^2} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C \ (a > 0)$；

（20）$\int \sqrt{a^2 - x^2} \mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + C \ (a > 0)$；

（21）$\int \sqrt{x^2 - a^2} \mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \dfrac{1}{2} a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C \ (a > 0)$；

（22）$\int \sqrt{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \dfrac{1}{2} a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \quad (a > 0)$.

4.2　典型例题分析

4.2.1　题型一、不定积分的概念与性质问题

例 4.2.1　求不定积分 $\int \mathrm{d}[\int \mathrm{d}f(x)]$.

解　由不定积分的性质知

$$\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C,$$

故 $\mathrm{d}[\int \mathrm{d}f(x)]=\mathrm{d}f(x)$，从而 $\int \mathrm{d}[\int \mathrm{d}f(x)]=f(x)+C$.

例 4.2.2　设 $f'(\ln x)=x$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$.

解　令 $t=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^t$，因此 $f'(t)=\mathrm{e}^t$，所以 $f(t)=\mathrm{e}^t+C$，即 $f(x)=\mathrm{e}^x+C$. 又已知 $f(0)=1$，所以 $C=0$，故 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

例 4.2.3　【2014（1）】设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则 $f(7)=$________.

解　由题意

$$f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\,\mathrm{d}x=x^2-2x+C,\quad x\in[0,2]$$

又因为 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f(0)=0$，从而 $C=0$，即 $f(x)=x^2-2x$. 又因为 $f(x)$ 是周期为 4，因此

$$f(7)=f(-1+8)=f(-1)=-f(1)=-(1-2)=1.$$

4.2.2　题型二、利用换元积分法求解不定积分

例 4.2.4　求不定积分 $\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解法 1　原式
$$=\int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int \csc^2 x\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x)$$
$$=-\cot x+\frac{1}{\sin x}+C.$$

解法 2　原式
$$=\int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\frac{x}{2}+C.$$

注　在求解不定积分时，一个常用的技巧就是将分母化为一个式子，然后将积分拆成一些简单积分的代数和．本题的两种解法用的都是这个思路．

例 4.2.5　求不定积分 $\int \cos^3 x\mathrm{d}x$.

解
$$\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2 x)\mathrm{d}\sin x$$

$$=\sin x-\int\sin^2 x\mathrm{d}\sin x=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

注　在运用第一类换元法求以三角函数为被积函数的积分时，主要思路就是利用三角恒等式把被积函数化为熟知的积分，通常会用到同角的三角恒等式、倍角公式、半角公式、积化和差公式等．对于本题来说，被积函数是奇次幂，从被积函数中分离出 $\cos x$，并与 $\mathrm{d}x$ 凑成微分 $\mathrm{d}\sin x$，再利用三角恒等式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，然后即可积分.

例 4.2.6　求不定积分 $\int\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解

$$\int\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2+x+\frac{1}{x}}{2-x-\frac{1}{x}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+x^2+1}{\sqrt{2}x-x^2-1}\right|+C.$$

注　本题也可以利用有理函数积分方法，即进行如下分解：

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{1+2x^2+x^4-2x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^2-2x^2}=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

通分比较同类项的系数可以得到 $A=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，$D=\frac{1}{2}$，然后再分别积分即可.

例 4.2.7　求不定积分 $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x$，其中 $a>0$.

解　当 $x>a$ 时，令 $x=a\sec t$，$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\mathrm{d}t$，因此

$$\text{原式}=\int\frac{a^2\sec^2 t}{a\tan t}a\sec t\tan t\mathrm{d}t=a^2\int\sec^3 t\mathrm{d}t.$$

而

$$\int\sec^3 t\mathrm{d}t=\int\sec t\mathrm{d}(\tan t)=\sec t\tan t-\int\tan t\mathrm{d}(\sec t)$$

$$=\sec t\tan t-\int\tan^2 t\sec t\mathrm{d}t=\sec t\tan t-\int(\sec^2 t-1)\sec t\mathrm{d}t$$

$$=\sec t\tan t-\int\sec^3 t\mathrm{d}t+\int\sec t\mathrm{d}t,$$

所以

$$原式=a^2\int\sec^3 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\sec t\tan t+\frac{a^2}{2}\int\sec t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\sec t\tan t+\frac{a^2}{2}\ln|\sec t+\tan t|+C,$$

又因为 $\sec t=\frac{x}{a}$， $\tan t=\sqrt{\sec^2 t-1}=\frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}$，因此

$$原式=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

当 $x<-a$ 时，令 $u=-x$，则 $u>a$，从而

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=-\int\frac{u^2}{\sqrt{u^2-a^2}}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}u\sqrt{u^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}|+C$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|-x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

综上，当 $|x|>a$ 时，

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

4.2.3 题型三、利用分部积分法求解不定积分

例 4.2.8 求不定积分 $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}=-\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}+\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}+\int\frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}+\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}+x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$$

例 4.2.9 求不定积分 $\int\sec^3 x\mathrm{d}x$.

$$\int\sec^3 x\mathrm{d}x=\int\sec x\,\mathrm{d}\tan x=\sec x\tan x-\int\tan x\,\mathrm{d}\sec x$$

$$=\sec x\tan x-\int\sec x\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\sec x\tan x-\int\sec x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$=\sec x\tan x-\int\sec^3 x\mathrm{d}x+\int\sec x\,\mathrm{d}x$$

$$=\sec x\tan x-\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x+\ln|\sec x+\tan x|,$$

所以

$$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C .$$

例 4.2.9　【2011（3）】求不定积分 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　原式 $= 2\int(\arcsin\sqrt{x} + \ln x)\mathrm{d}(\sqrt{x}) \xlongequal{t=\sqrt{x}} 2\int(\arcsin t + 2\ln t)\,\mathrm{d}t$

$$= 2t(\arcsin t + 2\ln t) - 2\int t\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2t(\arcsin t + 2\ln t) - 4t + \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}(1-t^2)$$

$$= 2t(\arcsin t + 2\ln t) - 4t + 2\sqrt{1-t^2} + C$$

$$= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x} + \ln x) - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C .$$

注　在求解不定积分时，一个常用的技巧就是见到复合函数的积分就用变量替换，有时可以直接替换，有时也可以先凑微分再替换，即需要使用两类换元积分法.

例 4.2.10　求不定积分 $\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x$.

解法 1　原式 $= \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

$$\xlongequal{t=\mathrm{e}^x} \int \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln t - \ln(t+1) + C$$

$$= x - \ln(\mathrm{e}^x + 1) + C .$$

解法 2　原式 $= \int \frac{\mathrm{e}^x + 1 - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \int\left(1 - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)\mathrm{d}x = x - \int \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)$

$$= x - \ln(\mathrm{e}^x + 1) + C .$$

解法 3　原式 $= \int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-x}) = -\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) + C.$

例 4.2.11　求不定积分 $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\ln x\,\mathrm{d}x$.

解　由于

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} ,$$

因此

$$原式 = \int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{2\ln x}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{2\ln x}{x-1} + 2\int \frac{1}{x(x-1)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{2\ln x}{x-1} + 2\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(\ln x)^2-\frac{2\ln x}{x-1}+2\ln|x-1|+2\ln|x|+C.$$

4.2.4　题型四、利用等式$\int u\mathrm{d}v+\int v\mathrm{d}u=uv+C$求解不定积分

例 4.2.12　【2008 年北京市竞赛题】$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=$________.

解　原式$=\int\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

$$=\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}-\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

注　在本题中，$-\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$与$\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$互相抵消后不应该为零，而是任意常数$C$.

例 4.2.13　【2005 年北京市竞赛题】设$f(x)$可导，且

$$\int x^3f'(x)\mathrm{d}x=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C,$$

求$f(x)$的表达式.

解　由题意

$$x^3f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x-4\sin x-4x\cos x+6\sin x,$$

整理得

$$f'(x)=-\frac{2\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}+\frac{2\sin x}{x^3}.$$

又因为

$$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}(\cos x)=-\frac{1}{x}\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\cos x-\int\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\cos x+C_1.$$

类似方法可以证明

$$\int\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{2\sin x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{x^2}\sin x+C_2,$$

因此

$$f(x)=-\frac{\sin x}{x^2}+\frac{\cos x}{x}+C.$$

4.2.5　题型五、求解有理函数的不定积分

例 4.2.13　求不定积分$\int\frac{x+4}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.

解　　原式$=\int\frac{x+1+3}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{x+1}{x^2+2x+5}dx+\int\frac{3}{x^2+2x+5}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+2x+5}d(x^2+2x+5)+3\int\frac{1}{(x+1)^2+2^2}d(x+1)$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\frac{3}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C.$$

例 4.2.14　求不定积分$\int\frac{x+4}{x^2-x-2}dx$.

解　设

$$\frac{x+4}{x^2-x-2}=\frac{x+4}{(x-2)(x+1)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}=\frac{(a+b)x+a-2b}{(x-2)(x+1)},$$

则$a+b=1$，$a-2b=4$，解得$a=2$，$b=-1$，从而

$$\int\frac{x+4}{x^2-x-2}dx=2\int\frac{1}{x-2}dx-\int\frac{1}{x+1}dx=2\ln|x-2|-\ln|x+1|+C$$

$$=\ln\frac{(x-2)^2}{|x+1|}+C.$$

例 4.2.15　求不定积分$\int\frac{x^3+2x^2+x-5}{(x-1)^{2015}}dx$.

解　令$t=x-1$，则$x=t+1$，从而

$$x^3+2x^2+x-5=(t+1)^3+2(t+1)^2+t+1-5=t^3+5t^2+8t-1,$$

因此

$$原式=\int\frac{t^3+5t^2+8t-1}{t^{2015}}dt=\int\frac{1}{t^{2012}}dt+5\int\frac{1}{t^{2013}}dt+8\int\frac{1}{t^{2014}}dt-\int\frac{1}{t^{2015}}dt$$

$$=-\frac{1}{2011}\frac{1}{t^{2011}}-\frac{5}{2012}\frac{1}{t^{2012}}-\frac{8}{2013}\frac{1}{t^{2013}}+\frac{1}{2014}\frac{1}{t^{2014}}+C$$

$$=-\frac{1}{2011}\frac{1}{(x-1)^{2011}}-\frac{5}{2012}\frac{1}{(x-1)^{2012}}-\frac{8}{2013}\frac{1}{(x-1)^{2013}}+\frac{1}{2014}\frac{1}{(x-1)^{2014}}+C.$$

4.2.6　题型六、求解三角函数有理式的不定积分

例 4.2.16　求不定积分$\int\frac{1}{\cos x\sqrt{\sin x}}dx$.

解　　原式$=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x\sqrt{\sin x}}dx=\int\frac{1}{(1-\sin^2 x)\sqrt{\sin x}}d\sin x$

$$=2\int\frac{1}{1-\sin^2 x}d\sqrt{\sin x}\ \underline{\underline{t=\sqrt{\sin x}}}\ 2\int\frac{1}{1-t^4}dt$$

$$=\int\left[\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{1-t^2}\right]dt=\arctan t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

$$=\arctan\sqrt{\sin x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}\right|+C.$$

例 4.2.17　求不定积分$\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$.

解 令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$， $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$， $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，从而

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u=\int\frac{2u+1+u^2-1-u^2}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u\\&=\int\frac{(1+u)^2-(1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u=\int\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u-\int\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u\\&=\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)-\ln|1+u|+C\\&=\frac{x}{2}+\ln\left|\sec\frac{x}{2}\right|-\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.\end{aligned}$$

注 三角有理函数问题一般可以通过万能替换方法将其化为有理函数的积分. 该方法求解过程往往比较烦琐，因此能使用其他方法求解时，尽量避免使用万能替换.

例 4.2.18 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^4x+\cos^4x}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{1}{(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1-2\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{2}{2-\sin^2(2x)}\mathrm{d}x\xlongequal{t=2x}\int\frac{1}{2-\sin^2t}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{\sec^2t}{2\sec^2t-\tan^2t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{2+\tan^2t}\mathrm{d}(\tan t)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}\right)+C.\end{aligned}$$

注 本题通过对被积函数进行恒等变形，并结合换元积分法给出了一种比较简捷的解法，避免了使用万能替换方法.

4.2.7 题型七、简单无理函数的不定积分

例 4.2.19 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$.

解 令 $t^6=x+1$，则 $6t^5\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{1}{t^3+t^2}\cdot6t^5\mathrm{d}t=6\int\frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t=2t^3-3t^2+6t+6\ln|t+1|+C\\&=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}+6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C.\end{aligned}$$

注 被积函数中有开不同次的根式，为了同时去掉根号，选取根指数的最小公倍数.

例 4.2.20 求不定积分 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$（$a>0$）.

解法 1

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=a\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\\&=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}(a^2-x^2)\end{aligned}$$

$$= a \cdot \arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C .$$

解法 2 令 $t = \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$，解得 $x = \dfrac{a(t^2-1)}{t^2+1}$， $\mathrm{d}x = \dfrac{4at}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$，因此

$$原式 = \int \frac{4at^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = 4a\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - 4a\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

$$= 2a \cdot \arctan t - 2a\frac{t}{1+t^2} + C$$

$$= 2a \cdot \arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{a^2-x^2} + C .$$

4.2.8 题型八、递推公式问题

例 4.2.21 试建立 $I_n = \int(\arcsin x)^n \mathrm{d}x$ 的递推公式，其中 n 为自然数.

解 当 $n=0$ 时， $I_0 = \int \mathrm{d}x = x + C$；

当 $n=1$ 时，

$$I_1 = \int \arcsin x \mathrm{d}x = x \cdot \arcsin x - \int x \mathrm{d}(\arcsin x)$$

$$= x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C ;$$

当 $n \geqslant 2$ 时，

$$I_n = \int(\arcsin x)^n \mathrm{d}x = x(\arcsin x)^n - \int x \mathrm{d}(\arcsin x)^n$$

$$= x(\arcsin x)^n - \int\frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}(\arcsin x)^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$= x(\arcsin x)^n + n\int(\arcsin x)^{n-1}\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$$

$$= x(\arcsin x)^n + n \cdot (\arcsin x)^{n-1} \cdot \sqrt{1-x^2} - n\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(\arcsin x)^{n-1}$$

$$= x(\arcsin x)^n + n \cdot (\arcsin x)^{n-1} \cdot \sqrt{1-x^2} - n(n-1)\int(\arcsin x)^{n-2}\mathrm{d}x ;$$

因此当 $n \geqslant 2$ 时，递推公式为

$$I_n = x(\arcsin x)^n + n \cdot (\arcsin x)^{n-1} \cdot \sqrt{1-x^2} - n(n-1)I_{n-2} .$$

例 4.2.22 试建立 $I_n = \int \sin^n x \mathrm{d}x$ 的递推公式，其中 n 为自然数.

解 当 $n=0$ 时， $I_0 = \int \mathrm{d}x = x + C$；当 $n=1$ 时， $I_1 = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$；当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$I_n = -\int \sin^{n-1} x \mathrm{d}(\cos x) = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x \mathrm{d}x$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int(1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x \mathrm{d}x$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

所以

$$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

4.2.9　题型九、分段函数的积分问题

例 4.2.23　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x>0\\ e^{3x}-1 & x\leqslant 0\end{cases}$，求 $\int f(x)dx$.

解　当 $x>0$ 时，

$$\int f(x)dx=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C_1.$$

当 $x\leqslant 0$ 时，

$$\int f(x)dx=\int(e^{3x}-1)dx=\frac{1}{3}e^{3x}-x+C_2.$$

由于 $\int f(x)dx$ 在 $x=0$ 处连续，因此 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{3}x^3-x+C_1\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{3}e^{3x}-x+C_2\right)$.

从而 $C_1=\frac{1}{3}+C_2$，因此

$$\int f(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+C & x>0\\ \frac{1}{3}e^{3x}-x-\frac{1}{3}+C & x\leqslant 0\end{cases}.$$

例 4.2.24　求不定积分 $\int\max\{2,|x|\}dx$.

解　由于

$$\max\{2,|x|\}=\begin{cases}-x & x<-2\\ 2 & -2\leqslant x<2\\ x & x\geqslant 2\end{cases},$$

当 $x<-2$ 时，$\int(-x)\,dx=-\frac{1}{2}x^2+C_1$；

当 $-2\leqslant x<2$ 时，$\int 2\,dx=2x+C_2$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C_3$.

由于 $\int\max\{2,|x|\}dx$ 在 $x=-2$，$x=2$ 处连续，因此有

$$\lim_{x\to -2^-}\left(-\frac{1}{2}x^2+C_1\right)=\lim_{x\to -2^+}(2x+C_2),$$

$$\lim_{x\to 2^-}(2x+C_2)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2}x^2+C_3\right).$$

解得 $C_2=2+C_1$，$C_3=4+C_1$. 从而

$$\int \max\{2, |x|\}\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 + C & x < -2 \\ 2x + 2 + C & -2 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + 4 + C & x \geqslant 2 \end{cases}.$$

例 4.2.25 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(|x+2|^n + |x|^n)^{\frac{1}{n}}$，求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$．

解 当 $x \leqslant -1$ 时，$f(x) = |x| = -x$；当 $x > -1$ 时，$f(x) = |x+2| = x+2$，因此

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leqslant -1 \\ x+2 & x > -1 \end{cases}.$$

显然函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，故

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1 & x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + C_2 & x > -1 \end{cases}.$$

由原函数的连续性可知

$$\lim_{x\to -1^-}\left(-\frac{1}{2}x^2 + C_1\right) = \lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + C_2\right),$$

故 $C_1 = C_2 - 1$，取 $C_2 = C$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 - 1 + C & x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + C & x > -1 \end{cases}.$$

4.3 深 化 训 练

4.3.1 填空题

（1）若 $\int f(x)\mathrm{d}x = \sin x + C$，则 $\int xf(x^2)\mathrm{d}x =$ __________.

（2）若 $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\sin x}{x} + C$，则 $\int xf(1-3x^2)\mathrm{d}x =$ __________.

（3）$\int \dfrac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}x =$ __________.

（4）$\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x + x}\mathrm{d}x =$ __________.

（5）$\int \dfrac{\sin x}{3+\sin^2 x}\mathrm{d}x =$ __________.

（6）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2(x+b)^2} =$ __________ $(a \neq b)$.

（7）$\int \dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x =$ __________ $(|a| \neq |b|)$.

4.3.2　单项选择题

（1）设 C 是不为 1 的常数，则下列选项中不是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 原函数的是（　　）.

（A）$\ln|x|$；　（B）$\ln|x|+C$；　（C）$\ln|Cx|$；　（D）$C\ln|x|$.

（2）若 $\int f(x)\mathrm{d}x = x\ln(1+x)+C$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$（　　）.

（A）2；　（B）-2；　（C）1；　（D）-1.

（3）设 $\int f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+C$，则 $f(x)=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{x}$；　（B）$\dfrac{1}{x^2}$；　（C）$-\dfrac{1}{x}$；　（D）$-\dfrac{1}{x^2}$.

（4）若 $f(x)=2^x+x^2$，则 $\int f'(2x)\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{2}(2^x+x^2)+C$；　（B）$2^{2x}+4x^2+C$；

（C）$2^{2x-1}+2x^2+C$；　（D）$2^{2x-1}+x^2+C$.

（5）已知 $f'(\cos x)=\sin x$，则 $f(\cos x)=$（　　）.

（A）$-\cos x+C$；　（B）$\cos x+C$；

（C）$\dfrac{1}{2}\sin x\cos x-\dfrac{1}{2}x+C$；　（D）$\dfrac{1}{2}\sin x\cos x+\dfrac{1}{2}x+C$.

（6）设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$\mathrm{e}^{-x}(1-x)+C$；　（B）$\mathrm{e}^{-x}(1+x)+C$；

（C）$\mathrm{e}^{-x}(x-1)+C$；　（D）$-\mathrm{e}^{-x}(1+x)+C$.

（7）【2016（2）】已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1) & x<1\\ \ln x & x\geqslant 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　）.

（A）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x<1\\ x(\ln x-1) & x\geqslant 1\end{cases}$；　（B）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x<1\\ x(\ln x+1)-1 & x\geqslant 1\end{cases}$；

（C）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x<1\\ x(\ln x+1)+1 & x\geqslant 1\end{cases}$；　（D）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x<1\\ x(\ln x-1)+1 & x\geqslant 1\end{cases}$.

4.3.3　求解下列有理函数的积分：

（1）$\displaystyle\int\frac{x^3}{4+x^2}\mathrm{d}x$；　（2）$\displaystyle\int\frac{1}{x(x^{10}+1)^3}\mathrm{d}x$；

（3）$\displaystyle\int\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x$；　（4）$\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

4.3.4　求解下列无理函数的积分：

（1）$\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$；　（2）$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-a^2}}\mathrm{d}x\quad(a>0)$；　（3）$\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$.

4.3.5　求解下列三角函数有理式的积分：

（1）$\displaystyle\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$；　（2）$\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$；　（3）$\displaystyle\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$；

（4）$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$；　（5）$\int \sin^5 x \cos^8 x \, \mathrm{d}x$；

（6）$\int \sin^2 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x$；　（7）$\int \frac{1}{\sin^4 x} \mathrm{d}x$.

4.3.6　求解下列不定积分：

（1）$\int \frac{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x$；　（2）$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$；　（3）$\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} \mathrm{d}x$；

（4）$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \mathrm{d}x$；　（5）$\int \mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2 \mathrm{d}x$；

（6）$\int \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x-a}}{\sqrt{\mathrm{e}^x+a}} \mathrm{d}x \quad (a>0)$；　（7）$\int \frac{a^4+x^4}{a^6+x^6} \mathrm{d}x \quad (a>0)$.

4.3.7　已知 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} \mathrm{d}x = x^2 + \ln^2 x + C$，试求 $\int f(x) \mathrm{d}x$.

4.3.8　求不定积分 $\int \left[\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x) f''(x)}{f'^3(x)} \right] \mathrm{d}x$.

4.4　深化训练详解

4.3.1　填空题

（1）$\frac{1}{2}\sin(x^2)+C$．**提示**　由 $\int f(x)\mathrm{d}x = \sin x + C$，两边求导数得 $f(x)=\cos x$，因此

$$\int x f(x^2) \mathrm{d}x = \int x\cos(x^2) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(x^2)+C .$$

（2）$-\frac{\sin(1-3x^2)}{6(1-3x^2)}+C$.

（3）$\frac{1}{8(x^8+1)}+\frac{1}{8}\ln(x^8+1)+C$．**提示**　令 $x^8=t$，则 $\mathrm{d}t = 8x^7 \mathrm{d}x$，则

$$\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \frac{t}{(t+1)^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int \frac{1}{t+1} \mathrm{d}(t+1) - \frac{1}{8}\int \frac{1}{(t+1)^2} \mathrm{d}(t+1)$$

$$= \frac{1}{8(x^8+1)} + \frac{1}{8}\ln(x^8+1) + C.$$

（4）$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+C$．**提示**　$\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x} \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+C$.

（5）$\frac{1}{4}\ln\frac{2-\cos x}{2+\cos x}+C$.

（6）$-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+C$．**提示**

$$\text{原式} = \frac{1}{(a-b)^2}\int \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\int \left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)} \right] \mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\left(-\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)+\frac{2}{(a-b)^3}\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+C.$$

（7）$\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}-\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}\right)+C$．**提示**

原式$=\frac{1}{b^2-a^2}\int\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}-\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}\right)+C$.

4.3.2　单项选择题

（1）（D）．　　（2）（A）．**提示**　$f(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$.

（3）（D）．**提示**　$f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

（4）（C）．**提示**　$\int f'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f'(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}f(2x)+C$.

（5）（C）．**提示**　**解法 1**　由题意，$f'(x)=\sqrt{1-x^2}$，因此

$$f(x)=\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,$$

因此

$$f(x)=\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arccos x+C,$$

从而 $f(\cos x)=\frac{1}{2}\sin x\cos x-\frac{1}{2}x+C$.

解法 2　由于

$$[f(\cos x)]'=f'(\cos x)\cdot(-\sin x)=-\sin^2 x=-\frac{1-\cos 2x}{2},$$

因此

$$f(\cos x)=-\int\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{2}x+C.$$

（6）（B）．**提示**　$(\mathrm{e}^{-x})'=-\mathrm{e}^{-x}=f(x)$.

（7）（D）．**提示**　由已知可得，$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2+C_1 & x<1\\ x(\ln x-1)+C_1+1 & x\geqslant 1\end{cases}$，取 $C_1=0$，故选（D）.

4.3.3　（1）原式$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{4+x^2}\mathrm{d}(x^2)\xlongequal{u=x^2}\frac{1}{2}\int\frac{u}{4+u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\frac{4+u-4}{4+u}\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{2}u-2\ln|4+u|+C=\frac{x^2}{2}-2\ln(4+x^2)+C.$$

（2）原式 $=\int\frac{x^9}{x^{10}(x^{10}+1)^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{10}\int\frac{1}{x^{10}(x^{10}+1)^3}\mathrm{d}(x^{10})$

$$\xlongequal{u=x^{10}}\frac{1}{10}\int\frac{1}{u(u+1)^3}\mathrm{d}u=\frac{1}{10}\int\frac{1+u-u}{u(u+1)^3}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{u(u+1)^2}-\frac{1}{(u+1)^3}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1+u-u}{u(u+1)^2}-\frac{1}{(u+1)^3}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{u(u+1)}-\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{1}{(u+1)^3}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{1}{(u+1)^3}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{10}\left[\ln\frac{x^{10}}{1+x^{10}}+\frac{1}{1+x^{10}}+\frac{1}{2(1+x^{10})^2}\right]+C.$$

（3）$\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{7}{25}\arctan(x+1)+C$.

（4）$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$.

4.3.4　（1）令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，因此

$$原式=\int\frac{2t^2}{\sqrt{2-t^3}}\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{\sqrt{2-t^3}}\mathrm{d}(2-t^3)=-\frac{4}{3}\sqrt{2-t^3}+C=-\frac{4}{3}\sqrt{2-x\sqrt{x}}+C.$$

（2）原式 $=\int\frac{1}{\mathrm{e}^x\sqrt{1-a^2\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-a^2\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}(a\mathrm{e}^{-x})=-\frac{1}{a}\arcsin(a\mathrm{e}^{-x})+C$.

（3）令 $x=\tan t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2+1}=\sec t$，$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，所以

$$原式=\int\tan^2 t\cdot\sec t\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\sec^5 t\mathrm{d}t-\int\sec^3 t\mathrm{d}t.$$

而

$$\begin{aligned}\int\sec^5 t\mathrm{d}t&=\int\sec^3 t\,\mathrm{d}(\tan t)=\tan t\cdot\sec^3 t-3\int\tan t\cdot\sec^2 t\cdot\sec t\cdot\tan t\,\mathrm{d}t\\&=\tan t\cdot\sec^3 t-3\int[\sec^2 t-1]\cdot\sec^3 t\,\mathrm{d}t\\&=\tan t\cdot\sec^3 t-3\int\sec^5 t\,\mathrm{d}t+3\int\sec^3 t\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以

$$\int\sec^5 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\tan t\cdot\sec^3 t+\frac{3}{4}\int\sec^3 t\,\mathrm{d}t,$$

而

$$\int \sec^3 t\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}(\tan t) = \sec t\cdot\tan t - \int \tan^2 t\cdot \sec t\,\mathrm{d}t$$
$$= \sec t\cdot\tan t - \int \sec^3 t\,\mathrm{d}t + \int \sec t\,\mathrm{d}t,$$

所以 $\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sec t\cdot\tan t + \frac{1}{2}\ln\left|\sec t + \tan t\right| + C$，因此

$$原积分 = \frac{1}{4}\tan t\cdot\sec^3 t - \frac{1}{8}\sec t\cdot\tan t - \frac{1}{8}\ln\left|\sec t + \tan t\right| + C$$
$$= \frac{1}{4}x\cdot\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\cdot x\cdot\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{8}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C\ .$$

4.3.5　（1）原式 $= \int \frac{x+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$= \int x\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x = x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$
$$= x\tan\frac{x}{2} + C\ .$$

（2）原式 $= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)$

$$= \tan x - \frac{1}{\cos x} + C\ .$$

（3）原式 $= \int x\cot x\cdot\csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\int x\cot x\,\mathrm{d}(\cot x) = -\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}(\cot^2 x)$

$$= -\frac{1}{2}x\cot^2 x + \frac{1}{2}\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x\cot^2 x + \frac{1}{2}\int(\csc^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}x\cot^2 x - \frac{1}{2}\cot x - \frac{1}{2}x + C\ .$$

（4）原式 $= \int \frac{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\int \csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C\ .$$

（5）$-\frac{1}{9}\cos^9 x + \frac{2}{11}\cos^{11} x - \frac{1}{13}\cos^{13} x + C$. **提示**　原式 $= \int \sin^4 x\cos^8 x\,\mathrm{d}(\cos x)$.

（6）$\frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\sin(2x) - \frac{1}{64}\sin(4x) - \frac{1}{192}\sin(6x) + C$. **提示**　利用倍角公式降低三角函数的幂次.

（7）**解法 1**　令 $u = \tan\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，则

$$原式=\int\frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4}du=\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3u^3}-\frac{3}{u}+3u+\frac{u^3}{3}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3}-\frac{3}{8\tan\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3+C.$$

解法 2　$原式=\int\csc^2x(1+\cot^2x)dx=\int\csc^2xdx+\int\cot^2x\cdot\csc^2xdx$

$$=-\cot x-\frac{1}{3}\cot^3x+C.$$

4.3.6　（1）$原式=\int\frac{\sqrt{x}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}dx=\int[\sqrt{x}(x+1)-x\sqrt{x+1}]dx$

$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int[(x+1-1)\sqrt{x+1}]dx$$

$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int(x+1)^{\frac{3}{2}}dx-\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}+C.$$

（2）$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\arcsin\sqrt{x}d\sqrt{x}$，令 $t=\sqrt{x}$，则

$$\int\arcsin\sqrt{x}d\sqrt{x}=\int\arcsin tdt=t\arcsin t-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=t\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C,$$

所以

$$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.$$

（3）令 $t=\sqrt{e^x+1}$，$x=\ln(t^2-1)$，$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$，则

$$原式=2\int\frac{1}{t^2-1}dt=-2\int\frac{1}{1-t^2}dt=-\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{e^x+1}}{1+\sqrt{e^x+1}}\right|+C.$$

（4）$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$$

（5）原式$=\int e^{2x}(\tan^2 x+1+2\tan x)dx=\int e^{2x}(\sec^2 x+2\tan x)dx$

$$=\int e^{2x}\sec^2 x dx+2\int e^{2x}\tan x dx=\int e^{2x}d\tan x+2\int e^{2x}\tan x dx$$

$$=e^{2x}\tan x-2\int e^{2x}\tan x dx+2\int e^{2x}\tan x dx=e^{2x}\tan x+C .$$

（6）原式$=\int\frac{e^x-a}{\sqrt{e^{2x}-a^2}}dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-a^2}}dx-a\int\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-a^2}}dx$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-a^2}}d(e^x)-a\int\frac{1}{e^x\sqrt{1-a^2e^{-2x}}}dx$$

$$=\ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-a^2}\right|+\int\frac{1}{\sqrt{1-a^2e^{-2x}}}d(ae^{-x})$$

$$=\ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-a^2}\right|+\arcsin(ae^{-x})+C .$$

（7）原式$=\int\frac{a^4+x^4}{a^6+x^6}dx=\int\frac{(a^4-a^2x^2+x^4)+a^2x^2}{(a^2+x^2)(a^4-a^2x^2+x^4)}dx$

$$=\int\frac{1}{a^2+x^2}dx+a^2\int\frac{x^2}{a^6+x^6}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+\frac{a^2}{3}\int\frac{1}{a^6+x^6}d(x^3)$$

$$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+\frac{1}{3a}\arctan\frac{x^3}{a^3}+C .$$

4.3.7　$\frac{1}{2}e^{2x}+x^2+C_1x+C_2$，其中$C_1$，$C_2$为任意常数.

4.3.8　原式$=\int\frac{f(x)f'^2(x)-f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}dx=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}dx$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}d\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C .$$

4.5　综合提高训练

例 4.5.1　【2001（1）】求不定积分$\int\frac{\arctan(e^x)}{e^{2x}}dx$.

解　原式$=-\frac{1}{2}\int\arctan(e^x)d(e^{-2x})=-\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan(e^x)+\frac{1}{2}\int e^{-2x}d(\arctan e^x)$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan(e^x)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{e^{2x}(1+e^{2x})}d(e^x),$$

而

$$\int\frac{1}{e^{2x}(1+e^{2x})}d(e^x)=\int\frac{1}{t^2(1+t^2)}dt=\int\frac{1}{t^2}dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=-\frac{1}{t}-\arctan t+C=-e^{-x}-\arctan e^x+C,$$

所以

$$\int \frac{\arctan(e^x)}{e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan(e^x) - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\arctan e^x + C .$$

例 4.5.2　【2002（3）】设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$，求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)dx$.

解　令 $u = \sin^2 x$，则 $f(u) = \frac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$，从而 $f(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$，因此

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)dx = \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = -\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d(1-x)$$

$$= -2\int \arcsin\sqrt{x}d\sqrt{1-x} = -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int \sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C .$$

例 4.5.3　【2006 年北京市竞赛题】已知

$$f'(\sin x) = \cos x + \tan x + x ,\quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} ,$$

且 $f(0) = 1$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　令 $u = \sin x$，$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$，则 $f'(u) = \sqrt{1-u^2} + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} + \arcsin u$，因此

$$f(x) = \int \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \right)dx ,$$

利用分部积分法，容易得到

$$\int \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \right)dx = x\arcsin x + C ,$$

因此

$$f(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + x\arcsin x + C .$$

又因为 $f(0) = 1$，所以 $C = 1$，故

$$f(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + x\arcsin x + 1 .$$

例 4.5.4　求不定积分 $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

解法 1　令 $t = \arctan x$，则 $x = \tan t$，$dx = \sec^2 t dt$，从而

$$原式 = \int \frac{e^t \tan t}{\sec^3 t}\sec^2 t dt = \int \frac{e^t \tan t}{\sec t}dt = \int \sin t\, d(e^t) .$$

利用分部积分法有

$$\int \sin t\, d(e^t) = e^t \sin t - \int e^t \cos t\, dt = e^t \sin t - \int \cos t\, d(e^t)$$

$$=e^t\sin t-e^t\cos t-\int e^t\sin t\,dt,$$

因此

$$\int\sin t\,d(e^t)=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C.$$

由 $t=\arctan x$ 可知，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$x=\tan t$，所以

$$\sin t=\frac{\tan t}{\sec t}=\frac{\tan t}{\sqrt{\sec^2 t}}=\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad \cos t=\frac{\sin t}{\tan t}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

故

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\frac{1}{2}e^{\arctan x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

解法 2 记 $I=\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$，则

$$I=-\int e^{\arctan x}\,d(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=-e^{\arctan x}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,de^{\arctan x}$$

$$=-e^{\arctan x}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+\int e^{\arctan x}\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx,$$

$$I=\int\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}de^{\arctan x}=e^{\arctan x}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}-\int e^{\arctan x}\,d\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$$

$$=e^{\arctan x}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}-\int e^{\arctan x}\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx,$$

因此

$$I=\frac{1}{2}e^{\arctan x}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}-\frac{1}{2}e^{\arctan x}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

注 复合函数的积分往往采用变量替换，因此解法 1 的解题思路是比较自然的．解法 2 使用了等式 $\int u\mathrm{d}v+\int v\mathrm{d}u=uv+C$，技巧性比较高，该解题思路在题型四中已经进行了详细阐释．

例 4.5.5 【1990 年北京市竞赛题】求不定积分 $\int\frac{e^{-\sin x}\cdot\sin(2x)}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}dx$．

解 原式 $=\int\frac{e^{-\sin x}\cdot 2\sin x\cos x}{\frac{1}{4}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^2}dx=8\int\frac{e^{-\sin x}\cdot\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}dx=8\int\frac{e^{-\sin x}\cdot\sin x}{(1-\sin x)^2}d(\sin x)$，

令 $t=\sin x$，则

$$\text{原式}=8\int\frac{e^{-t}\cdot t}{(1-t)^2}dt=-8\int e^{-t}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{(1-t)^2}\right)dt$$

$$=-8\int e^{-t}\frac{1}{1-t}dt+8\int e^{-t}\frac{1}{(1-t)^2}dt=-8\int e^{-t}\frac{1}{1-t}dt+8\int e^{-t}d\frac{1}{1-t}$$

$$=-8\int e^{-t}\frac{1}{1-t}dt+8e^{-t}\cdot\frac{1}{1-t}-8\int\frac{1}{1-t}de^{-t}=8e^{-t}\cdot\frac{1}{1-t}+C$$

$$=8e^{-\sin x}\cdot\frac{1}{1-\sin x}+C.$$

例 4.5.6 【1995 年北京市竞赛题】设 y 是由方程 $y^3(x+y)=x^3$ 所确定的隐函数，求 $\int\frac{1}{y^3}dx$.

解　设 $y=tx$，则方程化为 $(tx)^3(x+tx)=x^3$，从而有

$$x=\frac{1}{t^3(1+t)},\quad y=\frac{1}{t^2(1+t)},$$

因此

$$dx=-\frac{4t+3}{t^4(1+t)^2}dt,\quad \frac{1}{y^3}=t^6(1+t)^3,$$

故

$$\int\frac{1}{y^3}dx=-\int\frac{4t+3}{t^4(1+t)^2}\cdot t^6(1+t)^3dt=-\int\frac{4t+3}{t^4(1+t)^2}\cdot t^6(1+t)^2dt$$

$$=-\int(4t^4+7t^3+3t^2)dt=-\frac{4}{5}t^5-\frac{7}{4}t^4-t^3+C$$

$$=-\frac{4y^5}{5x^5}-\frac{7y^4}{4x^4}-\frac{y^3}{x^3}+C.$$

例 4.5.7　【2009（1）】求不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx\quad(x>0)$.

解　令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，解得 $x=\frac{1}{t^2-1}$，因此

$$原式=\int\ln(1+t)d\frac{1}{t^2-1}=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}d\ln(1+t)$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}dt,$$

可以得到

$$\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}=\frac{1}{(t+1)^2(t-1)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right],$$

因此

$$原式=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\frac{1}{4}\ln(t-1)+\frac{1}{4}\ln(t+1)-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right)-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}+C.$$

第 5 章　定积分及其应用

5.1　知 识 要 点

5.1.1　定积分的定义

1．定义式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

应用：

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$；

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} f\left[a+(b-a)\cdot\frac{i}{n}\right] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2．说明

（1）若已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则积分值 I 仅与被积函数 $f(x)$ 和区间 $[a,b]$ 有关系，与积分变量的记法没关系.

（2）无界函数一定不可积，即函数有界是函数可积的必要条件.

（3）定积分存在的充分条件：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，或在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

5.1.2　定积分的几何意义与物理意义

（1）若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，直线 $x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积.

（2）若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant 0$，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，直线 $x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形面积的负值.

（3）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，直线 $x=b$ 以及 x 轴所围成平面图形面积的代数和，即等于 x 轴上方的平面图形面积减去 x 轴下方的平面图形面积，如图 5.1 所示，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3$.

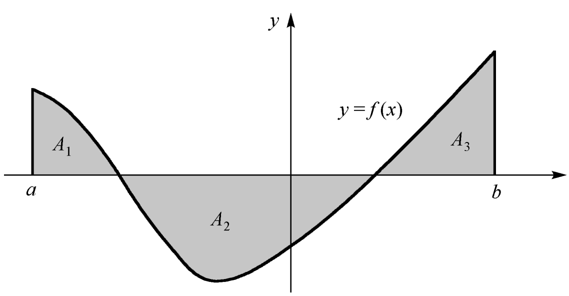


图 5.1

（4）定积分的**物理意义**：$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ 表示做变速直线运动物体以速度 $v=v(t)$ 在时间段 $[a,b]$ 内走过的路程.

5.1.3　定积分的性质

规定 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

假设下面所涉及的定积分都存在，则有：

（1）**线性性质**　设 k 和 l 为常数，则对于任意的实数 a 和 b，有

$$\int_a^b [k\,f(x)\pm l\,g(x)]\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm l\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

（2）**定积分对积分区间的可加性**　对于任意的实数 a、b 和 c，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

（3）$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

（4）**保号性**　如果在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

特别地，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)$ 不恒等于 0，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

（5）若对于任意的 $x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

特别地，若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对于任意的 $x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant g(x)$，且 $f(x)$ 不恒等于 $g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，$(a<b)$.

（6）**估值定理**　设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a) .$$

（7）**积分中值定理**　如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a) .$$

这里 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**平均值或积分均值** .

注　积分中值定理还可以进一步修正为：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a) .$$

（8）**积分不等式**　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则有下列不等式：

①$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$；

② $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

5.1.4　积分上限的函数及其导数

（1）形式：$\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$， $x\in[a,b]$.

（2）积分上限的函数的导数：若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)，\quad x\in[a,b].$$

一般地，若 $f(t)$ 连续， $g(x)$ 和 $h(x)$ 可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[g(x)]\cdot g'(x)；$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[h(x)]h'(x)-f[g(x)]g'(x).$$

5.1.5　定积分的计算

1．牛顿-莱布尼茨公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

2．定积分的换元法

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

（1） $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

（2） $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ （或 $[\beta,\alpha]$ 上）具有连续导数，且其值域 $R_\varphi=[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

3．定积分的分部积分法

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，则 $\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$.

5.1.6　反常积分（或广义积分）

1．无穷限的反常积分（或广义积分）

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，若对于任意的实数 $b>a$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，

即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

此时也称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；若上述极限不存在，也称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似可以定义

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\mathrm{d}x .$$

若对某个常数 c，广义积分 $\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x .$$

2．无界函数的反常积分（或广义积分）

若函数 $f(x)$ 在 $x=b$ 的任一个邻域内无界，则称 $x=b$ 为函数 $f(x)$ 的**瑕点**. 若 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有定义，$x=b$ 为 $f(x)$ 的瑕点，对于 $\forall\varepsilon>0$，$f(x)$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 上可积，若 $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的广义积分，也称为瑕积分，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x .$$

此时也称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，若上述极限不存在，也称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

若 a 为瑕点，可以类似定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x .$$

若对某个 $c\in(a,b)$，且 c 为瑕点，$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\mathrm{d}x .$$

3．Γ 函数

对于 $\forall t>0$，Γ 函数的定义为：$\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x$．$\Gamma$ 函数的性质主要包括：

$$\Gamma(1)=1；\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}；\ \Gamma(t+1)=t\Gamma(t)；\ \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)；\ \Gamma(n+1)=n!.$$

5.1.7　几个重要的结论

（1）设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{若 } f(x) \text{为奇函数} \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x & \text{若 } f(x) \text{为偶函数} \end{cases}.$$

（2）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，对于任意的实数 a 和正整数 n 有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

（3）若 $f(x)$在$[0, 1]$上连续，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x;$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

（4）$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & n\text{为奇数} \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & n\text{为偶数} \end{cases}.$$

（5）若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续，则

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \text{ 为} \begin{cases} \text{偶函数} & \text{若 } f(x)\text{为奇函数} \\ \text{奇函数} & \text{若 } f(x)\text{为偶函数} \end{cases}.$$

注　若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 的原函数均为偶函数．若 $f(x)$ 为偶函数，则原函数中只有一个原函数是奇函数．

5.1.8　定积分的应用

1．平面图形的面积

如图 5.2 所示，曲边梯形 $f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 的面积为

$$A = \int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

如图 5.3 所示，曲边梯形 $g_1(y)\leqslant x\leqslant g_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$ 的面积为

$$A = \int_c^d [g_2(y)-g_1(y)]\mathrm{d}y.$$

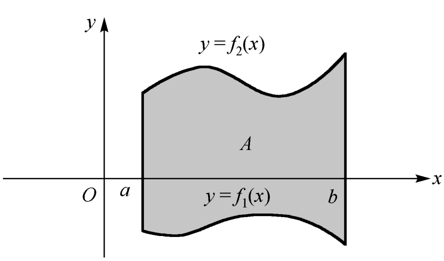


图 5.2

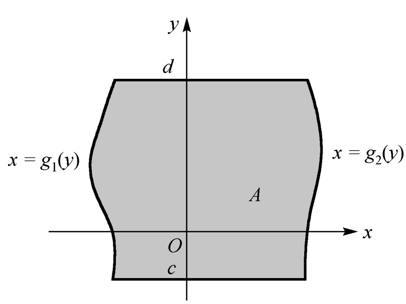


图 5.3

如图 5.4 所示，曲边扇形 $0 \leqslant r \leqslant r(\theta)$，$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ 的面积为 $A = \dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [r(\theta)]^2 \mathrm{d}\theta$.

2．旋转体的体积

（1）如图 5.5 所示，区间 $[a, b]$ 上由曲线 $y = f(x) \geqslant 0$ 与 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x ;$$

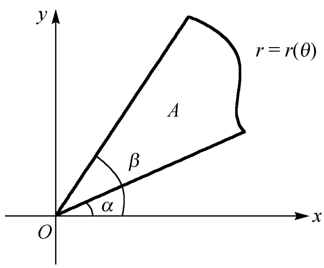


图 5.4

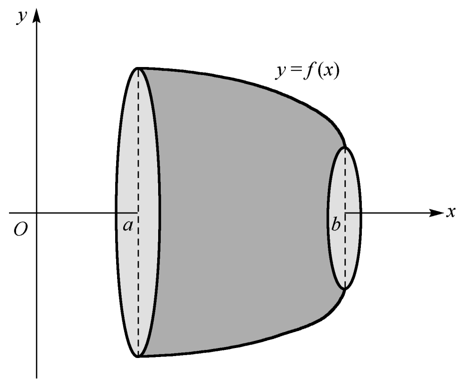


图 5.5

（2）如图 5.6 所示，区间 $[a, b]$ 上由曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V_x = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\mathrm{d}x \quad (f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0).$$

（3）如图 5.7 所示，区间 $[c, d]$ 上（y 轴）由曲线 $x = g(y) \geqslant 0$ 与 y 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y .$$

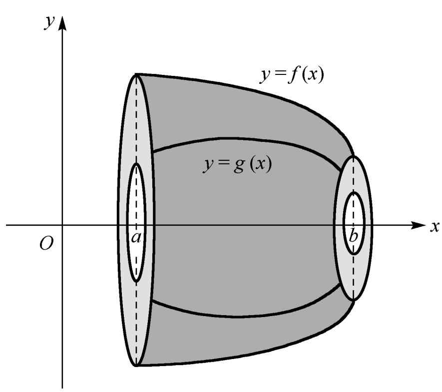


图 5.6

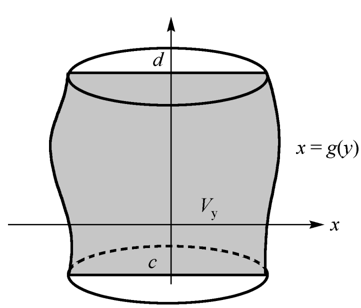


图 5.7

（4）如图 5.8 所示，区间 $[c, d]$ 上（y 轴）由曲线 $x = \varphi(y)$ 与 $x = \phi(y)$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V_y = \pi\int_c^d [\varphi^2(y) - \phi^2(y)]\mathrm{d}y \quad (\varphi(y) \geqslant \phi(y) \geqslant 0).$$

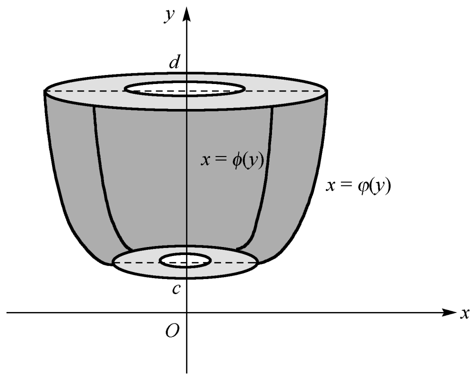


图 5.8

3．平行截面面积已知的立体的体积

如图 5.9 所示，设一立体位于过 $[a,b]$ 的端点且垂直于 x 轴的两个平面之间，$A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积，则该立体的体积为

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x .$$

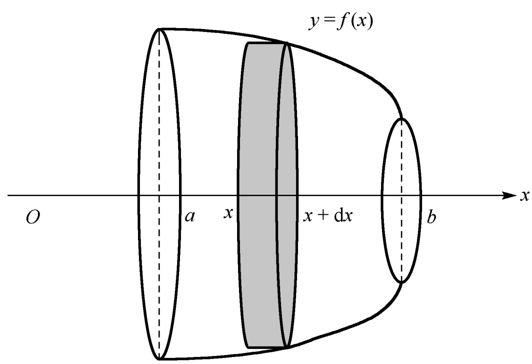


图 5.9

4．平面曲线的弧长

（1）曲线弧由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$（$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$）给出，其中 $x = x(t)$，$y = y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，且导数不同时为零，则曲线弧长为 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$.

（2）如图 5.10 所示，曲线弧由直角坐标方程 $y = f(x)$（$a \leqslant x \leqslant b$）给出，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，则曲线弧长为 $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$.

（3）如图 5.11 所示，曲线弧由极坐标方程 $r = r(\theta)$（$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$）给出，其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，则曲线弧长为 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\mathrm{d}\theta$.

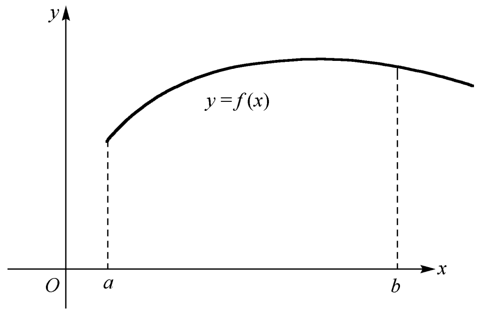


图 5.10

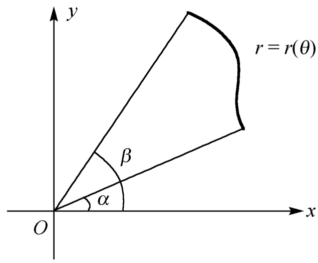


图 5.11

5．变力沿直线所做的功

如图 5.12 所示，设物体在变力 $F(x)$ 的作用下，沿变力的方向由 $x=a$ 移动到 $x=b$，则全部功为

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x .$$

6．水压力

在水下深为 h 处，由水质量产生的压强为 ρgh，其中 ρ 为水的密度.

（1）设有一面积为 A 的平薄板水平地放置在深为 h 处的均匀静止的液体中，则平板一侧所受的压力为 $F=pA=\rho ghA$.

（2）设有一高为 h，宽为 $f(x)\geqslant 0$ 的平薄板垂直地放置在均匀静止的水中，平薄板的上方与水面的距离为 a，则该平薄板所受的侧压力为

$$F=\int_a^{a+h}\rho g\,xf(x)\mathrm{d}x ,$$

这里建立原点在水面上，正向为垂直向下的 x 轴，如图 5.13 所示.

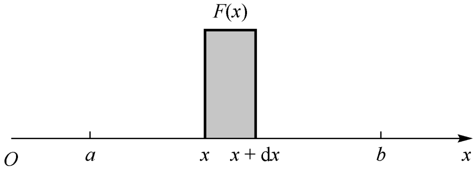


图 5.12

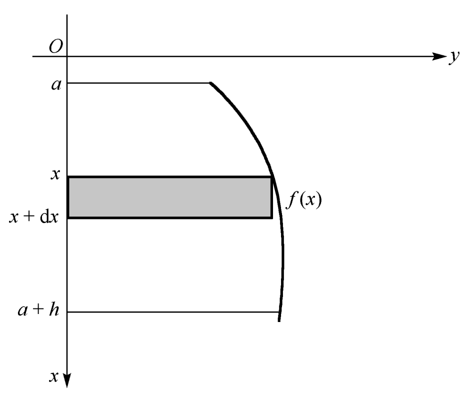


图 5.13

7．引力

质量分别为 m_1、m_2，相距为 r 的两质点间的引力的大小为 $F=G\dfrac{m_1\cdot m_2}{r^2}$，其中 G 为引力系数，引力的方向沿着两质点的连线方向．如要计算一个细棒对一个质点的引力，那么，由于

细棒上各点与该质点的距离是变化的，且各点对该质点的引力的方向也是变化的，常用元素法来解决.

5.2　典型例题分析

5.2.1　题型一、有关定积分概念与性质的问题

例 5.2.1　【2015 年北京市竞赛题】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$.

解　本题不能直接利用定积分的定义来求解，需要先进行放缩. 注意到

$$\frac{1}{n+1}2^{\frac{k}{n}}\leqslant\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{n}2^{\frac{k}{n}},$$

所以

$$\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}2^x\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}.$$

故由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}=\frac{1}{\ln 2}.$$

例 5.2.2　【2015 年北京市竞赛题】已知连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x,$$

求 $f(x)$.

解　由于定积分是一个常数，因此设 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=A$，则有

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+A,$$

等式两边同乘以 $\sin x$ 再取定积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2 x}\sin x\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}A\sin x\mathrm{d}x,$$

而

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2 x}\sin x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2 x}\sin x\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\sin x\mathrm{d}x$$

$$= -\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A\sin x\mathrm{d}x = 0 .$$

因此有 $A = \dfrac{\pi^2}{2}$，从而

$$f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} + \frac{\pi^2}{2} .$$

例 5.2.3　已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x^2 - x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解　由于定积分是一个常数，因此设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$， $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = B$，则有

$$f(x) = x^2 - Bx + 2A .$$

对等式两边在区间 $[0,1]$ 上同时取定积分，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x - \int_0^1 Bx\mathrm{d}x + \int_0^1 2A\mathrm{d}x ,$$

因此有

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}B + 2A . \tag{1}$$

对等式 $f(x) = x^2 - Bx + 2A$ 两边在区间 $[0,2]$ 上同时取定积分，得

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\mathrm{d}x - \int_0^2 Bx\mathrm{d}x + \int_0^2 2A\mathrm{d}x ,$$

因此有

$$B = \frac{8}{3} - 2B + 4A . \tag{2}$$

联立式（1）和式（2），解得

$$A = \frac{1}{3},\quad B = \frac{4}{3} .$$

从而

$$f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} .$$

例 5.2.4　设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$，求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} tf(t)\sin\dfrac{3}{t}\mathrm{d}t$.

解　根据积分中值定理，存在一点 $\xi \in (x, x+2)$，使得

$$\int_x^{x+2} t f(t)\sin\frac{3}{t}\mathrm{d}t = 2\xi f(\xi)\sin\frac{3}{\xi} ,$$

由夹逼定理可知，当 $x\to+\infty$ 时，$\xi\to+\infty$，且 $\dfrac{3}{\xi}\to 0^+$，因此

$$原极限=\lim_{\xi\to+\infty}2\xi f(\xi)\sin\frac{3}{\xi}=\lim_{\xi\to+\infty}6f(\xi)=6\times 1=6.$$

5.2.2　题型二、利用换元法和分部积分法求解积分

例 5.2.5　计算下列定积分：

（1）$\displaystyle\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}dx$；　　（2）$\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx$；

（3）$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$；　　（4）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$；

（5）$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$.

解　（1）$\displaystyle\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}dx=\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\ln x}\sqrt{1-\ln x}}d(\ln x)$

$$=2\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}d(\sqrt{\ln x})$$

$$=2\arcsin(\sqrt{\ln x})\Big|_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}=\frac{\pi}{6}.$$

（2）**解法 1**　令 $t=\sqrt{1-e^{-2x}}$，$x=-\dfrac{1}{2}\ln(1-t^2)$，$dx=\dfrac{t}{1-t^2}dt$，当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\ln 2$ 时，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 从而

$$原式=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}t\frac{t}{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^2}{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-1+\frac{1}{1-t^2}\right)dt$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(\ln|1+t|-\ln|1-t|\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解法 2　令 $e^{-x}=\sin t$，$x=-\ln\sin t$. 当 $x=0$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$；当 $x=\ln 2$ 时，$t=\dfrac{\pi}{6}$. 此时 $\sqrt{1-e^{-2x}}=\cos t$，$dx=-\dfrac{\cos t}{\sin t}dt$，因此

$$原式=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{\sin^2 t}-\sin t\right)\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{1-\cos^2 t}-\sin t\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\cos^2 t}\mathrm{d}\cos t+\cos t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+0-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

（3）**解法 1**

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}.$$

解法 2　注意到被积函数

$$\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}+\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}+x\left(x-\frac{1}{x}\right)'\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}=\left(x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\right)',$$

所以

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\right)'\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}.$$

（4）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\tan^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}-2+\sqrt{2}.$$

（5）原式$\displaystyle=\int_0^1\ln(1+x)\frac{1}{(2-x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}(2-x)^{-1}$

$$= \frac{\ln(1+x)}{2-x}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2 + \frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{3}\left(\ln|x-2| - \ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{3}.$$

例 5.2.6　设 $f(x)=\begin{cases} 2x+\dfrac{3}{2}x^2 & -1\leqslant x<0 \\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2} & 0\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$，求 $\Phi(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$ 的表达式.

解　当 $-1\leqslant x<0$ 时，

$$\Phi(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt=\int_{-1}^{x}\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)dt=\frac{x^3}{2}+x^2-\frac{1}{2};$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\Phi(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt=\int_{-1}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=\int_{-1}^{0}\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)dt+\int_0^x \frac{te^t}{(e^t+1)^2}dt$$

$$=-\frac{1}{2}-\int_0^x t\,d\left(\frac{1}{e^t+1}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{t}{e^t+1}\bigg|_0^x+\int_0^x\frac{1}{e^t+1}dt$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\left(1-\frac{e^t}{e^t+1}\right)dt=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+[t-\ln(e^t+1)]\Big|_0^x$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+x-\ln(e^x+1)+\ln 2.$$

因此

$$\Phi(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt=\begin{cases}\dfrac{x^3}{2}+x^2-\dfrac{1}{2} & -1\leqslant x<0 \\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{e^x+1}+x-\ln(e^x+1)+\ln 2 & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

例 5.2.7　求解下列定积分：

（1）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & x\geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+e^x} & -1\leqslant x<0\end{cases}$，求 $I=\int_0^2 f(x-1)dx$；

（2）$I=\int_0^x f(t)g(x-t)dt$（$x\geqslant 0$），其中当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x$，而

$$g(x)=\begin{cases}\sin x & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & x\geqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$$

解　（1）令 $u=x-1$，则 $du=dx$，

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^0 \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}+1) + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ &= -\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)\Big|_{-1}^0 + \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln(1+\mathrm{e}).\end{aligned}$$

（2）令 $u = x - t$，则

$$\begin{aligned}I &= \int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t = -\int_x^0 f(x-u)g(u)(-\mathrm{d}u) \\ &= \int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) = x$，所以，当 $x \geqslant t$ 时，

$$f(x) = x - t,\quad g(t) = \begin{cases}\sin t & 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & t \geqslant \dfrac{\pi}{2}\end{cases},$$

所以

$$I = \begin{cases}\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t\mathrm{d}t = x - \sin x & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \\ \displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t\mathrm{d}t = x - 1 & x \geqslant \dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$$

5.2.3　题型三、带有技巧性的定积分计算问题

例 5.2.8　求解定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

解　利用奇偶性，有

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}{4\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sec^2\frac{x}{2} - 1\right)\mathrm{d}x = \left(4\tan\frac{x}{2} - 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4 - \pi.\end{aligned}$$

例 5.2.9　求解定积分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.

解法 1　由于 $|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{1-\sin^2 x}$，由结论

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x\text{，}$$

可得

$$I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x .$$

又根据结论 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$，可知

$$I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\mathrm{d}x .$$

于是 $2I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$，故 $I_n = \frac{\pi^2}{4}$.

解法 2

$$\begin{aligned} I &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}(\sin x + \cos x) \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}\ln(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} . \end{aligned}$$

例 5.2.10　求解下列定积分：

（1）$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$；　　　（2）$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin x|\arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$.

解　（1）令 $x = -u$，则 $I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 u}{1 + \mathrm{e}^u}\mathrm{d}u = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1 + \mathrm{e}^x} + \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}\right)\sin^2 x\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\pi - 2)\text{，} \end{aligned}$$

因此

$$I = \frac{1}{8}(\pi - 2) .$$

（2）由题意

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin x|\arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin x \cdot \arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x\text{，}$$

对于 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin x\cdot\arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$，令 $x=-t$，则

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin x\cdot\arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sin(-t)\cdot\arctan(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}(-t)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sin t\cdot\arctan(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin t\cdot\arctan(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t=-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\arctan(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x,$$

从而

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\sin x|\arctan(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot[\arctan(\mathrm{e}^x)+\arctan(\mathrm{e}^{-x})]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

注　本题用到结论 $\arctan(\mathrm{e}^x)+\arctan(\mathrm{e}^{-x})=\dfrac{\pi}{2}$.

5.2.4　题型四、积分上限的函数及其导数问题

例 5.2.11　设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$，其反函数为 $g(x)$，若 $\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2\mathrm{e}^x$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　对等式 $\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2\mathrm{e}^x$ 两边对 x 求导，得

$$g[f(x)]f'(x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x,$$

而 $g[f(x)]=x$，所以，当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$，积分得

$$f(x)=\mathrm{e}^x(x+1)+C.$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故有

$$0=f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}[\mathrm{e}^x(x+1)+C]=1+C,$$

从而解得 $C=-1$，因此 $f(x)=\mathrm{e}^x(x+1)-1$.

例 5.2.12　求连续函数 $f(x)$，使它满足当 $x\neq 0$ 时 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=f(x)+1$.

解　令 $tx=u$，则原式变为

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=f(x)+1,$$

即

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=xf(x)+x.$$

两边关于 x 求导，得

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+1,$$

即

$$f'(x)=-\frac{1}{x}.$$

从而 $f(x)=-\ln|x|+C$. 综上，

$$f(x)=-\ln|x|+C\ （x\neq 0）.$$

例 5.2.13　【2016（1）】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

例 5.2.14　设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.

解　由已知可得 $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\pi-x}$，$f(0)=0$ 及 $f(\pi)=\int_0^\pi\dfrac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，从而利用分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x &= xf(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi x\,\mathrm{d}f(x)=\pi f(\pi)-\int_0^\pi xf'(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\pi f(\pi)-\int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x+\int_0^\pi\frac{(\pi-x-\pi)\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x\\ &=\pi\int_0^\pi\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x+\int_0^\pi\sin x\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^\pi\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x\\ &=\int_0^\pi\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^\pi=2.\end{aligned}$$

注　此题可以改为：设 $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\pi-x}$，$f(0)=0$，且求 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$. 解题过程完全一样.

例 5.2.15　设函数 $y=f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上，以 $T>0$ 为周期的连续函数，且 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=A$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$.

解　对于充分大的 $x>0$，必存在正整数 n，使得

$$nT\leqslant x\leqslant(n+1)T.$$

又

$$\begin{aligned}\int_0^{kT}f(t)\mathrm{d}t&=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{2T}f(t)\mathrm{d}t+\cdots+\int_{(k-1)T}^{kT}f(t)\mathrm{d}t\\ &=k\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=kA,\quad（k=1,2,\cdots）,\end{aligned}$$

故有

$$nA=\int_0^{nT}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{(n+1)T}f(t)\mathrm{d}t=(n+1)A,$$

及

$$\frac{nA}{(n+1)T} \leqslant \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x} \leqslant \frac{(n+1)A}{nT}.$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nA}{(n+1)T} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)A}{nT} = \frac{A}{T},$$

且当 $n\to\infty$ 时， $x\to+\infty$ ，由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x} = \frac{A}{T}.$$

例 5.2.16　设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(1,f(1))$ 处的切线为 $y=x-1$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^t f(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t}{x^2\ln\cos x}$.

解　令 $u=1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t$ ，则 $\mathrm{d}u=-\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$. 当 $t=0$ 时， $u=\mathrm{e}^{x^2}$ ；当 $t=x^2$ 时， $u=1$. 因此

$$\int_0^{x^2}\mathrm{e}^t f(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{e}^{x^2}}^1 f(u)(-\mathrm{d}u) = \int_1^{\mathrm{e}^{x^2}} f(u)\mathrm{d}u.$$

而

$$\ln\cos x = \ln[1+(\cos x-1)] \sim \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2,$$

因此

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^t f(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t}{x^2\ln\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{\int_1^{\mathrm{e}^{x^2}} f(u)\mathrm{d}u}{-\frac{1}{2}x^4} = -2\lim_{x\to0}\frac{\int_1^{\mathrm{e}^{x^2}} f(u)\mathrm{d}u}{x^4}$$

$$= -2\lim_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})\cdot\mathrm{e}^{x^2}\cdot2x}{4x^3} = -\lim_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})}{x^2}.$$

又由题设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(1,f(1))$ 处的切线为 $y=x-1$，得 $f(1)=0$， $f'(1)=1$，故

$$\text{原式} = -\lim_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})-f(1)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2} = -f'(1)\cdot1 = -1.$$

5.2.5　题型五、积分等式问题

例 5.2.17　已知 $f(\pi)=2$ ，且 $\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=5$ ，求 $f(0)$.

解　由于

$$\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}f'(x) = f'(x)\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}f(x) = -f(x)\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=f(\pi)+f(0)-\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x\text{，}$$

因此

$$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=f(\pi)+f(0)\text{.}$$

而由已知有

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\mathrm{d}x=5\text{，}$$

所以 $f(\pi)+f(0)=5$，从而 $f(0)=3$.

例 5.2.18　设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，满足 $f(x)=f(a-x)$，$g(x)+g(a-x)=k$，证明：

（1）$\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}k\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$；　　　　（2）求 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

证　（1）令 $t=a-x$，则

$$\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(a-t)g(a-t)(-\mathrm{d}t)$$

$$=\int_0^a f(t)g(a-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)g(a-x)\mathrm{d}x.$$

从而

$$2\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)[g(x)+g(a-x)]\mathrm{d}x$$

$$=k\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\text{，}$$

从而结论得证.

（2）在上式中，令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$，$g(x)=x$，$a=\pi$，则

$$f(x)=f(a-x)\text{，}\quad g(x)+g(a-x)=k=\pi\text{，}$$

满足题目的条件，从而

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}\text{.}$$

例 5.2.19　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$（$k>1$）. 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

证　构造辅助函数 $F(x)=x\mathrm{e}^{1-x}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$F'(x)=\mathrm{e}^{1-x}[(1-x)f(x)+xf'(x)]$$

在 $(0,1)$ 内可导，$F(1)=f(1)$. 由积分中值定理可知，至少存在一点 $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{k}\right)\subset(0,1)$，使得

$$k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=x_0\mathrm{e}^{1-x_0}f(x_0)=F(x_0)\text{，}$$

从而有 $F(1)=f(1)=F(x_0)$，故 $F(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上满足罗尔定理的条件. 由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(x_0,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$F'(\xi)=\mathrm{e}^{1-\xi}[(1-\xi)f(\xi)+\xi f'(\xi)].$$

注意到 $\mathrm{e}^{1-\xi}>0$，所以有

$$(1-\xi)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0,$$

即

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi),$$

结论得证.

例 5.2.20　设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)\,\mathrm{d}x=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证　作辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t,$$

由于 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)=\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_x^b g(x)\,\mathrm{d}x$，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，从而由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，而

$$F'(x)=f(x)\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t-g(x)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

即

$$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)\,\mathrm{d}x=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.2.6　题型六、积分不等式问题

例 5.2.21　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，试证明

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_0^x f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

证　显然 $f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x$. 由柯西−施瓦兹不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x,$$

得

$$f^2(x)=\left(\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^x 1^2\,\mathrm{d}x\int_0^x f'^2(x)\mathrm{d}x\leqslant x\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

由题设条件 $f(1)=0$，得 $f(x)=\int_1^x f'(x)\mathrm{d}x$，故

$$f^2(x)=\left(\int_1^x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_x^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_x^1 1^2\mathrm{d}x\int_x^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\leqslant(1-x)\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left((1-x)\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x+\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 5.2.22　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，单调减少且取正值．证明：对于满足 $0<\alpha<\beta<1$ 的任意 α、β 匀有　$\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$．

证法 1　令 $F(x)=x\int_0^\alpha f(t)\mathrm{d}x-\alpha\int_\alpha^x f(t)\mathrm{d}t$（$x\geqslant\alpha$），则

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x-\alpha f(x)=\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x-\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}t=\int_0^\alpha f(t)\mathrm{d}t-\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}t\\&=\int_0^\alpha[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少，所以，$F'(x)\geqslant 0$．从而 $F(x)$ 在 $x\geqslant\alpha$ 时单调增加，又

$$F(\alpha)=\alpha\int_0^\alpha f(t)\mathrm{d}x-\alpha\int_\alpha^\alpha f(t)\mathrm{d}t=\alpha\int_0^\alpha f(t)\mathrm{d}x>0,$$

所以 $F(\beta)>F(\alpha)>0$．即

$$\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x.$$

证法 2　由定积分中值定理知

$$\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha\beta f(\xi),\quad \xi\in[0,\alpha];$$

$$\alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x=\alpha(\beta-\alpha)f(\eta),\quad \eta\in[\alpha,\beta].$$

由 $f(x)$ 单调减少且取正值可得

$$\alpha\beta f(\xi)\geqslant\alpha\beta f(\eta)>\alpha(\beta-\alpha)f(\eta),$$

结论得证．

例 5.2.23　【2014（3）】设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$．证明：

（1）$0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a$，　$x\in[a,b]$；

（2）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$．

证　（1）当 $x\in[a,b]$ 时，函数 $g(t)$ 在 $[a,x]$ 上使用积分中值定理，则至少存在一点 $\xi\in[a,x]$，使得

$$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t=g(\xi)(x-a),$$

又因为 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$，因此

$$0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t=g(\xi)(x-a)\leqslant x-a,$$

结论（1）得证.

（2）构造辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} f(u)\mathrm{d}u,$$

当 $x\in(a,b)$ 时，

$$F'(x)=f(x)g(x)-f\left(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)g(x)\geqslant f(x)g(x)-f(a+x-a)g(x)=0,$$

且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，因此 $F(b)\geqslant F(a)=0$，结论（2）得证.

5.2.7　题型七、广义积分问题

例 5.2.24　若等式 $\int_{-\infty}^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$ 成立，求常数 a.

解　当 $a=0$ 时，题设等式不成立，故 $a\neq 0$. 由于

$$\int_{-\infty}^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^a x\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}=\frac{1}{2}\left[(x\mathrm{e}^{2x})\Big|_{-\infty}^a-\int_{-\infty}^a \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x\mathrm{e}^{2x})\Big|_{-\infty}^a-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_{-\infty}^a\right]=\frac{1}{2}a\mathrm{e}^{2a}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2a};$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{2a},$$

所以 $\dfrac{1}{2}a\mathrm{e}^{2a}-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2a}=\mathrm{e}^{2a}$，解得 $a=\dfrac{5}{2}$.

例 5.2.25　【2013（1）】$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________.

解　原式 $\displaystyle=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}(1+x)^{-1}=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\left[\ln x-\ln(1+x)\right]\Big|_1^{+\infty}=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2.$$

例 5.2.26　证明 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x$ 不依赖于参变量 α.

解　$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$.

对于第一个积分 $\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$ ，令 $x=\frac{1}{t}$ ，则

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)}\frac{1}{t^2}dt=\int_1^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx .$$

因此

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4} .$$

即不依赖于参变量 α .

例 5.2.27　设 a 、b 均为常数，$a>-2$ ，$a\neq 0$ ，求若 a 、b 为何值时，使

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)dx=\int_0^1\ln(1-x^2)dx .$$

解　由于

$$\int_0^1\ln(1-x^2)dx=\int_0^1\ln\left[(1-x)(1+x)\right]dx=\int_0^1\ln(1-x)dx+\int_0^1\ln(1+x)dx ,$$

结合定积分的分部积分法，有

$$\int_0^1\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\ln 2-\int_0^1\frac{x+1-1}{1+x}dx$$

$$=\ln 2-(1-\ln 2)=2\ln 2-1.$$

令 $t=1-x$ ，则瑕积分

$$\int_0^1\ln(1-x)dx=-\int_1^0\ln t\,dt=\int_0^1\ln t\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\ln t\,dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(t\ln t\Big|_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1 dt\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\varepsilon\ln\varepsilon-(1-\varepsilon))=-1 ,$$

所以

$$\int_0^1\ln(1-x^2)dx=2\ln 2-1-1=2(\ln 2-1) .$$

而

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)dx=\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{2-b+a}{2x+a}\right)dx$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\ln\frac{x}{(2x+a)^{1-\frac{1}{2}(b-a)}}\Bigg|_1^t,$$

若 $b-a\neq 0$，则上述极限不存在，所以要使原等式成立，必须 $a=b$，那么

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\ln\frac{x}{2x+a}\bigg|_1^t=\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{a+2}=-\ln 2+\ln(a+2),$$

所以 $-\ln 2+\ln(a+2)=2(\ln 2-1)$，从而 $a=b=\dfrac{8}{\mathrm{e}^2}-2$.

5.2.8　题型八、定积分的应用问题

例 5.2.28　【2013（3）】如图 5.14 所示，设 D 是由 $y=x^{\frac{1}{3}}$，$x=a(a>0)$ 及 x 轴围成的平面图形，V_x 和 V_y 分别是 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周得到的旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值.

解　如图 5.14 所示，根据旋转体体积的计算公式，有

$$V_x=\int_0^a\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{3}{5}a^{\frac{5}{3}},$$

$$V_y=\pi\cdot a^2a^{\frac{1}{3}}-\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\pi(y^3)^2\mathrm{d}y,$$

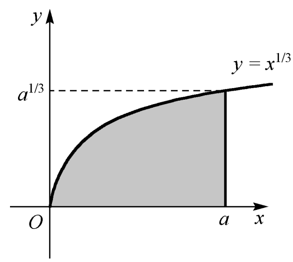


图 5.14

解得 $V_y=\pi\cdot a^2a^{\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{7}\pi\cdot a^{\frac{7}{3}}$，由题设 $V_y=10V_x$，可解的 $a=7\sqrt{7}$.

例 5.2.29　求曲线 $y=\ln x(2\leqslant x\leqslant 6)$ 的一条切线，使得切线与直线 $x=2$，$x=6$ 及曲线 $y=\ln x$ 所围成的图形的面积最小.

解　曲线 $y=\ln x$ 在点 $(c,\ln c)$ 的切线方程为 $y=\dfrac{x}{c}+\ln c-1$，于是面积

$$A=\int_2^6\left(\frac{x}{c}+\ln c-1-\ln x\right)\mathrm{d}x=4\left(\ln c+\frac{4}{c}\right)+2\ln 2-6\ln 6.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}c}=4\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{4}{c^2}\right)=0$，得 $c=4$. 由第一充分条件可知 $c=4$ 时，A 取得极小值，因而也取得最小值. 此时的切线方程为 $y=\ln 4+\dfrac{1}{4}(x-4)$.

例 5.2.30　设曲线方程为 $y=\mathrm{e}^{-x}(x\geqslant 0)$.

（1）把曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$、x 轴、y 轴和直线 $x=\xi(\xi>0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周，得一旋转体，求此旋转体体积 $V(\xi)$；求满足 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$ 的 a.

（2）在此曲线上找一点，使得过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积为最大，并求出该面积.

解　（1）根据旋转体体积的计算公式，有

$$V(\xi)=\int_0^{\xi}\pi(\mathrm{e}^{-x})^2\mathrm{d}x=\int_0^{\xi}\pi\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\xi}).$$

而

$$V(a)=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a}),$$

$$\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\xi})=\frac{\pi}{4}.$$

要 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$，则 $\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a})=\frac{\pi}{4}$，解得 $a=\frac{1}{2}\ln 2$.

（2）设切点为 (x_0,e^{-x_0})，则切线方程为

$$y-\mathrm{e}^{-x_0}=-\mathrm{e}^{-x_0}(x-x_0),$$

令 $x=0$ 得 $y=(1+x_0)\mathrm{e}^{-x_0}$；令 $y=0$，得 $x=1+x_0$．切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积为

$$S=\frac{1}{2}(1+x_0)^2\mathrm{e}^{-x_0},$$

$$S'=(1+x_0)\mathrm{e}^{-x_0}-\frac{1}{2}(1+x_0)^2\mathrm{e}^{-x_0}=\frac{1}{2}(1+x_0)(1-x_0)\mathrm{e}^{-x_0},$$

令 $S'=0$，得 $x_0=1$．由于当 $x_0<1$，$S'>0$；$x_0>1$，$S'<0$．故当 $x_0=1$ 时，面积 S 有极大值，即最大值. 所求切点为 $(1,\mathrm{e}^{-1})$，最大面积为 $S=\frac{1}{2}2^2\mathrm{e}^{-1}=2\mathrm{e}^{-1}$.

例 5.2.31　为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口，已知井深 30m，抓斗自重 400N，缆绳每米重 50N，抓斗抓起的污泥重 2000N，提升速度为 3m/s，在提升过程中，污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升到井口，问克服重力需要作多少焦耳的功?

解　以井底某点为原点，该点到井口的铅直线为 x 轴（向上方向为 x 轴正向).

第一，克服抓斗自重所做的功

$$W_1=400\times 30=12000.$$

第二，将抓斗由 x 处提升到 $x+\mathrm{d}x$ 处，克服缆绳重力所做的功为

$$\mathrm{d}W_2=50(30-x)\mathrm{d}x,$$

从而克服缆绳重力所做的功为

$$W_2=\int_0^{30}50(30-x)\mathrm{d}x=22500.$$

第三，又在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内提升污泥需所做的功为

$$\mathrm{d}W_3=3(2000-20t)\mathrm{d}t,$$

所以提升污泥所做的功为

$$W_3=\int_0^{\frac{30}{3}}3(2000-20t)\mathrm{d}t=57000.$$

综上，克服重力所做的功为

$$W=12000+22500+57000=91500\ （\mathrm{J}）.$$

例 5.2.32　半径为 R 的半球形水池充满水，将水从池中抽出，当抽出的水所做的功为将水全部抽出时所做的一半时，试问水面下降的高度 H 为多少？

解　取截面圆心为原点，竖直向下方向为 x 轴正方向，如图 5.15 所示．用定积分的元素法，得功的元素为

$$\mathrm{d}W=\rho g\pi(R^2-x^2)x\mathrm{d}x,$$

其中 ρ 为水的密度；g 为重力加速度．

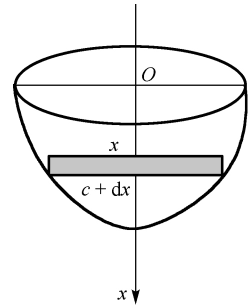


图 5.15

故水面下降的深度为 H 时，所做的功为

$$W(H)=\int_0^H \rho g\pi(R^2-x^2)x\mathrm{d}x=\frac{\pi\rho g}{4}H^2(2R^2-H^2).$$

将水全部抽空所做的功为

$$W(R)=\frac{\pi\rho g}{4}R^4.$$

令 $W(H)=\dfrac{1}{2}W(R)$，可解得 $H=\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}R$．

例 5.2.33　某闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线（开口向上）与线段 AB 所围成，抛物线顶点到 AB 的距离为 1m，AB 长为 2m，当水面与闸门的上端 CD 相平时，欲使闸门矩形部门承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5:4，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m？

解　以抛物线顶点为原点，闸门对称轴为 y 轴建立坐标系，则抛物线方程为 $y=x^2$．

设闸门矩形部分和下部（抛物线部分）承受的水压力依次为 P_1、P_2，则

$$P_1=2\int_1^{h+1}\rho\cdot g(h+1-y)\mathrm{d}y=\rho\cdot gh^2,$$

$$P_2=2\int_0^1\rho\cdot g(h+1-y)\sqrt{y}\mathrm{d}y=4\rho\cdot g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

由题设闸门矩形部门承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5∶4 有，

$$\rho gh^2:4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right)=5:4,$$

解得

$$h=2,\quad h=-\frac{1}{3}\text{（舍去）}.$$

从而所求闸门矩形部分的高 h 应为 2m.

5.3　深化训练

5.3.1　填空题

（1）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}=$________.

（2）若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$________.

（3）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=$________.

（4）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\tan t-\sin t)\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}t^3\,\mathrm{d}t}=$________.

（5）若当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 为连续函数，且满足 $\int_0^{x^2(1+x)}f(t)\mathrm{d}t=x$，则 $f(2)=$________.

（6）设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有定义，则 $\int_{-a}^{a}x^2\dfrac{f(x)-f(-x)}{f(x)+f(-x)}\mathrm{d}x=$________.

（7）$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\,\mathrm{d}x=$________.

（8）$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$________.

（9）广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\,\mathrm{d}x=$________.

（10）广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{(x+7)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x=$________.

（11）【2014（3）】设 D 是由 $xy+1=0$，$y+x=0$，$y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为________.

（12）【2012（3）】由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限围成的平面图形的面积为________.

（13）曲线 $y=x\mathrm{e}^x$ 和曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 所围成的向左无限延伸的平面图形的面积 S 为________.

（14）设由 y 轴，$y=x^2$，$y=a$ $(0<a<1)$ 在第一象限所围成的平面图形，由 $y=a$，$y=x^2$，$x=1$ 所围成的平面图形都绕 y 轴旋转，所得的旋转体的体积相等，则 $a=$________.

（15）一个横放着的圆柱形油桶，设桶的底半径为 R，油体的密度为 ρ，则桶的一个端面上所受到的油的压力是________.

（16）一个圆柱形的水池，高为 5m，底面半径为 3m，水面离池口 1m 深，要将水池内的水抽尽，需做________焦耳的功.

5.3.2　单项选择题

（1）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\tan 2}(1-\cos\sqrt{x})\mathrm{d}x}{5x^4}=$（　　）.

（A）1；　（B）$\ln 2$；　（C）0；　（D）不存在.

（2）定积分 $\int_{-1}^{1}(x^2\arctan x+2)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的值等于（　　）.

（A）$2-\dfrac{\pi}{4}$；　（B）$2-\dfrac{\pi}{2}$；　（C）π；　（D）2.

（3）设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x$，$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan(\sin x)\mathrm{d}x$，则三者之间的大小关系为（　　）.

（A）$I_1 < I_2 < I_3$；（B）$I_2 < I_1 < I_3$；（C）$I_3 < I_2 < I_1$；（D）$I_2 < I_3 < I_1$.

（4）设 $f(x)=\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t$，$g(x)=(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\int_0^x \arcsin t\,\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）.

（A）高阶无穷小量；（B）低阶无穷小量；

（C）同阶但是不等价的无穷小量；（D）等价无穷小量.

（5）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}=0$ 在开区间 (a,b) 内的根有（　　）个.

（A）0；（B）1；（C）2；（D）无穷多个.

（6）设 $f(x)$ 为连续函数，S 和 t 均为正数，$I=t\int_0^{\frac{S}{t}} f(tx)\mathrm{d}x$，则 I 的值（　　）.

（A）依赖于 S，t 和 x；（B）依赖于 S，t；

（C）依赖于 S，不依赖于 t；（D）依赖于 t 和 x，但不依赖于 S.

（7）设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$，求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在开区间 $(0,1)$ 内（　　）.

（A）有第一类间断点；（B）有第二类间断点；

（C）两种间断点都有；（D）连续.

（8）【2016（1）】 若广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）.

（A）$a<1$ 且 $b>1$；（B）$a>1$ 且 $b>1$；

（C）$a<1$ 且 $a+b>1$；（D）$a>1$ 且 $a+b>1$.

（9）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$. 令 $I_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$I_2=(b-a)f(b)$，$I_3=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$，则（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$；（B）$I_2<I_1<I_3$；（C）$I_3<I_1<I_2$；（D）$I_1\leqslant I_3<I_2$.

（10）曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形面积可以表示为（　　）.

（A）$-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$；

（B）$\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$；

（C）$-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$；

（D）$\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

（11）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<M$（M 为常数），则曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$x=a$，$x=b$ 所围图形绕直线 $y=M$ 旋转而成的旋转体体积为（　　）.

（A）$\int_a^b \pi[M-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$；

（B）$\int_a^b \pi[M-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$；

（C）$\int_a^b \pi[2M-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$；

（D）$\int_a^b \pi[2M-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

5.3.3　计算下列积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_{-1}^{1} \dfrac{x^2+\ln(1+x^2)\arctan x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^4 \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　（4）$\int_0^{\ln 5} \dfrac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x+3}\mathrm{d}x$；

（5）$\int_0^a \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$；　　（6）$\int_0^1 \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$；

（7）$\int_{-1}^3 \max\{x,x^2\}\mathrm{d}x$；　　（8）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{1+\cos(2x)}\mathrm{d}x$；

（9）$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$；　　（10）$\int_0^1 \dfrac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（11）$\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}\mathrm{d}x$.

5.3.4　求解下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{1-\sqrt{1-x^3}}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

5.3.5　设 $y=f(x)$ 是由方程 $2-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 u\,\mathrm{d}u$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

5.3.6　设存在正常数 a 和 b 满足关系式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{ax-\sin x}\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{b+t^2}}\mathrm{d}t=2$，试求 a 和 b 的值.

5.3.7　已知 $f'(x)\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$，且 $f(0)=0$，求 $f(x)$ 的表达式.

5.3.8　设函数 $f(x)$ 在实数域 R 内连续，且满足 $\int_0^x \mathrm{e}^t f(x-t)\mathrm{d}t=x$，试求 $f(x)$ 的表达式.

5.3.9　设函数 $f(x)=\int_0^x \dfrac{t+2}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t$ 在区间 $[0,1]$ 上的最值.

5.3.10　设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ 1+x & 0<x\leqslant 1\end{cases}$，求 $\varPhi(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[-1,1]$ 上的表达式，并研究 $\varPhi(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

5.3.11　设 $f(x)=\int_1^x \dfrac{2\ln u}{1+u}\mathrm{d}u$，$x\in(0,+\infty)$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

5.3.12　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$，试证明：（1）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；（2）若 $f(x)$ 单减，则 $F(x)$ 单增.

5.3.13　若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，证明

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x .$$

5.3.14　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 区间上连续，$f'(x) \geqslant 0$ 且 $f(0) \geqslant 0$．又设

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases},$$

其中 n 为正整数．试证：（1）$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 区间上连续；（2）在 $(0,+\infty)$ 内 $F'(x) \geqslant 0$.

5.3.15　已知 $f(x)$ 连续.

（1）证明：$\displaystyle\int_0^{2a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]\mathrm{d}x$；

（2）计算定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

5.3.16　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

5.3.17　设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且满足 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，证明：至少存在一点 $\xi \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\xi) = 2f(\xi)\tan\xi$.

5.3.18　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，试证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2 .$$

5.3.19　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续、单调减少且取正值，证明对于任意的 $0<a<b<1$，有

$$b\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x > a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

5.3.20　曲线 $f(x)=2\sqrt{x}$ 与 $g(x)=ax^2+bx+c\,(a>0)$ 相切于点 $(1,2)$，它们与 y 轴所围图形的面积为 $\dfrac{5}{6}$，求 a、b、c 的值.

5.3.21　设 $V(t)$ 是由曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与直线 $y=0$，$x=t$，$x=2t\,(0<t\leqslant 1)$ 所围图形的绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积．问 t 为何值时，$V(t)$ 最大？

5.3.22　求由曲线 $r=\sin\theta$，$r=\sin\theta+\cos\theta$ 所围成的公共部分的面积.

5.3.23　求摆线 $\begin{cases} x=1-\cos\theta \\ y=\theta-\sin\theta \end{cases}$ 一拱 $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 的弧长.

5.3.24　半径为 1 的球正好有一半浸入水中，球的密度为 1，求将球从水中取出需作的功.

5.3.25　底为 b 高为 h 的直角三角形薄板，顶点朝下底边在水面上竖直浸于水中，求薄板的一侧受到的水压力.

5.3.26 设有半径为 a 的圆板竖直浸没在水中，圆心到水面的距离为 $b(b>a)$，求此圆板的一侧所受的水压力.

5.4 深化训练详解

5.3.1 填空题

（1）$\dfrac{4\sqrt{2}-2}{3}$. （2）$\dfrac{\pi}{3}$. （3）$\dfrac{\pi}{2}$. （4）$\dfrac{1}{2}$. （5）$\dfrac{1}{5}$. （6）0. （7）2.

（8）$\dfrac{\pi}{4}$. **提示** 利用几何意义.

（9）$\dfrac{\pi}{4\mathrm{e}}$.

（10）$\dfrac{\pi}{3}$. **提示** 令 $x-2=t^2$.

（11）$\dfrac{3}{2}-\ln 2$. **提示** 面积 $A=\displaystyle\int_1^2\left(-\frac{1}{y}+y\right)\mathrm{d}y$.

（12）$4\ln 2$. **提示** 面积 $A=\displaystyle\int_0^1(4x-x)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(\frac{4}{x}-x\right)\mathrm{d}x$.

（13）e. **提示** 面积 $A=\displaystyle\int_{-\infty}^1(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^1(1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

（14）$\dfrac{1}{2}$. **提示** $\pi\displaystyle\int_0^a y\mathrm{d}y=\pi\int_a^1 1^2\mathrm{d}y-\pi\int_a^1 y\mathrm{d}y$.

（15）$\rho g\pi R^3$. （16）$108\pi g$；$W=\displaystyle\int_1^5 9\pi gx\mathrm{d}x$.

5.3.2 选择题

（1）（D）. （2）（C）. （3）（D）. （4）（C）. （5）（B）. （6）（C）.

（7）（A）. **提示** $\varPhi(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ x-\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处间断，且为第一类间断点.

（8）（C）. **提示** 将原式分解为两部分考虑：

$$\int_0^1\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x,$$

$\dfrac{1}{x^a}$ 在 $x=0$ 为瑕积分，在 $x=+\infty$ 为无穷限的广义积分，$\dfrac{1}{(1+x)^b}$ 在 $x=+\infty$ 为无穷限的广义积分，从而由广义积分的性质，可知（C）选项正确.

（9）（B）. （10）（C）. （11）（D）.

5.3.3 （1）原式 $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-2\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(-1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2.$$

（2）原式$=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\ln(1+x^2)\arctan x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=2\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+0=2\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}dx$$

$$=2\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})dx=2-2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=2-2\cdot\frac{\pi}{4}=2-\frac{\pi}{2}.$$

（3）**解法 1**　$\int_0^4\frac{1}{x+\sqrt{x}}dx=\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx=2\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}d(1+\sqrt{x})$

$$=2\ln(1+\sqrt{x})\Big|_0^4=2\ln 3.$$

解法 2　令 $t=\sqrt{x}$，当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=4$ 时，$x=2$．则

$$原式=\int_0^2\frac{1}{t+t^2}\cdot 2t\,dt=2\int_0^2\frac{1}{1+t}dt=2\ln(1+t)\Big|_0^2=2\ln 3.$$

（4）令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln(1+t^2)$，$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$，当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\ln 5$ 时，$t=2$，因此

$$原式=\int_0^2\frac{(t^2+1)t}{t^2+4}\frac{2t}{t^2+1}dt=2\int_0^2\frac{t^2}{t^2+4}dt=2\int_0^2\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt=4-\pi.$$

（5）令 $x=a\sin t$，当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$．此时 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$dx=a\cos t\,dt$，因此

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos t}{a\sin t+a\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin t+\cos t)+(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t+\cos t}d(\sin t+\cos t)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln(\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

（6）原式$=\int_0^1\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx=\int_0^1\frac{x}{(1+e^x)^2}d(1+e^x)=-\int_0^1 x\,d(1+e^x)^{-1}$

$$=-\left[x(1+e^x)^{-1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx.\quad=\frac{1}{1+e}+1-\ln(1+e)+\ln 2.$$

（7）由于

$$\max\{x,x^2\}=\begin{cases} x^2 & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ x & 0<x\leqslant 1 \\ x^2 & 1<x\leqslant 3 \end{cases},$$

因此

$$\int_{-1}^{3}\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^2\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{8}{3}=\frac{7}{2}.$$

（8）原式$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\,\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{2}x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(-\ln|\cos x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{\ln 2}{4}.$$

（9）令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，因此

$$原式=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=-2\int_0^{+\infty}t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t})$$

$$=-2\left(t\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)=-2\left(t\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}\right)$$

$$=-2\lim_{b\to+\infty}(b\mathrm{e}^{-b}+\mathrm{e}^{-b}-1)=2.$$

（10）$\displaystyle\int_0^1\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{b\to1^-}\int_0^b\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{x=\sin t}\lim_{b\to1^-}\int_0^{\arcsin b}\frac{\sin t\cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=-\lim_{b\to1^-}\int_0^{\arcsin b}\frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t)=-\lim_{b\to1^-}\arctan(\cos t)\Big|_0^{\arcsin b}$$

$$=-\lim_{b\to1^-}\{\arctan[\cos(\arcsin b)]-\arctan(\cos 0)\}=\frac{\pi}{4}.$$

（11）积分上限为$+\infty$，且 0 为瑕点．令 $\sqrt{x}=t$，则

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{2t}{t(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t.$$

令 $t=\tan u$，则 $\mathrm{d}t=\sec^2 u\mathrm{d}u$，从而

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u=2\sin u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$$

5.3.4　（1）由题意

$$原式=2\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot\cos x}{3x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

（2）由于当 $x\in[0,1]$ 时，$0\leqslant\dfrac{x^n}{1+x^2}\leqslant x^n$，因此

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$.

（3）

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln x\mathrm{d}x = -1.$$

5.3.5　方程 $2-\tan(x-y) = \int_0^{x-y}\sec^2 u\,\mathrm{d}u$ 两边同时对 x 求导数，得

$$2-\sec^2(x-y)(1-y') = \sec^2(x-y)(1-y').$$

$$1-y' = \cos^2(x-y),$$

$$y' = \sin^2(x-y),$$

继续求导，得

$$y'' = \sin(2x-2y)(1-y') = \sin(2x-2y)\cos^2(x-y).$$

5.3.6　由洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{ax-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t^2}}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t^2}}\mathrm{d}t}{ax-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{b+x^2}}}{a-\cos x} = 2,$$

由于上述分式的极限存在，且分子的极限为 0，因此分母的极限必为 0，即 $\lim\limits_{x\to 0}(a-\cos x) = 0$，从而 $a=1$. 又因为

$$2 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{b+x^2}}}{a-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1-\cos x)\sqrt{b+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2\sqrt{b+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{b}},$$

所以 $b=1$.

5.3.7　由于定积分是一个常数，因此设 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = A$，显然 $A\neq 0$，从而

$$f'(x) = \frac{2}{A},$$

积分得 $f(x) = \frac{2}{A}x + C$. 又 $f(0)=0$，所以 $f(x) = \frac{2}{A}x$. 在区间 $[0,2]$ 上对上述函数取定积分，得

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{2}{A}x\mathrm{d}x,$$

则有 $A = \frac{4}{A}$，从而 $A=\pm 2$，所以，$f(x) = \pm x$.

5.3.8　令 $u = x-t$，则 $t = x-u$，$\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$，当 $t=0$ 时，$u=x$；当 $t=x$ 时，$u=0$. 因此

$$\int_0^x \mathrm{e}^t f(x-t)\mathrm{d}t = -\int_x^0 \mathrm{e}^{x-u} f(u)\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\int_0^x \mathrm{e}^{-u} f(u)\mathrm{d}u,$$

因此 $e^x\int_0^x e^{-u}f(u)du=x$，即有

$$\int_0^x e^{-u}f(u)du=xe^{-x}.$$

等式两边同时对 x 求导数，得

$$e^{-x}f(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x},$$

故 $f(x)=1-x$.

5.3.9　当 $x\in(0,1)$ 时，由于 $f'(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x+x}>0$，因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，因此函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(0)=0$，最大值为 $f(1)=\int_0^1\dfrac{t+2}{t^2+2t+2}dt$. 而

$$\int_0^1\frac{t+2}{t^2+2t+2}dt=\int_0^1\frac{t+2}{(t+1)^2+1}dt=\int_1^2\frac{u+1}{u^2+1}du=\int_1^2\frac{u}{u^2+1}du+\int_1^2\frac{1}{u^2+1}du$$
$$=\frac{1}{2}\ln(u^2+1)\Big|_1^2+\arctan u\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}+\arctan 2-\frac{\pi}{4}.$$

因此，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}+\arctan 2-\dfrac{\pi}{4}$.

5.3.10　当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，

$$\varPhi(x)=\int_{-1}^x f(t)dt=\int_{-1}^x t^2dt=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3};$$

当 $0<x\leqslant 1$ 时，

$$\varPhi(x)=\int_{-1}^x f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^x f(t)dt=\int_{-1}^0 t^2dt+\int_0^x(1+t)dt=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{3}.$$

因此

$$\varPhi(x)=\int_{-1}^x f(t)dt=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{3} & -1\leqslant x\leqslant 0\\[2mm] \dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{3} & 0<x\leqslant 1\end{cases}.$$

另外，

$$\lim_{x\to0^+}\varPhi(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},\quad \lim_{x\to0^-}\varPhi(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},\quad \varPhi(0)=\frac{1}{3},$$

从而 $\varPhi(x)$ 在 $x=0$ 连续.

5.3.11　由已知，有 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\dfrac{2\ln u}{1+u}du$. 令 $u=\dfrac{1}{t}$，则 $du=-\dfrac{1}{t^2}dt$. 当 $x=1$ 时，$u=1$. 当 $u=\dfrac{1}{x}$ 时，$t=x$. 从而

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{2\ln t}{1+t}\frac{1}{t}dt=\int_1^x\frac{2\ln u}{1+u}\frac{1}{u}du.$$

所以

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{2\ln u}{1+u}\mathrm{d}u+\int_1^x\frac{2\ln u}{1+u}\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{2\ln u}{1+u}\left(1+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{2\ln u}{u}\mathrm{d}u=\ln^2 x\,.$$

5.3.12　（1）由于 $f(-x)=f(x)$，则

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t\overset{u=-t}{=\!=\!=}-\int_0^x(-x+2u)f(-u)\,\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^x(x-2u)f(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^x(x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)\,,$$

即若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(-x)=F(x)$， $F(x)$ 为偶函数.

（2） $F(x)=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$，且

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x)=\int_0^x[f(t)-f(x)]\,\mathrm{d}t\,,$$

而 $f(x)$ 单减，所以当 $0<t<x$ 时，

$$f(t)-f(x)>0\,,\quad F'(x)>0\,;$$

当 $x<t<0$ 时，

$$f(t)-f(x)<0\,,\quad F'(x)=\int_0^x[f(t)-f(x)]\,\mathrm{d}t=-\int_x^0[f(t)-f(x)]\,\mathrm{d}t>0\,;$$

即 $F'(x)>0$ 恒成立，从而 $F(x)$ 单增.

5.3.13　因为

$$\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}f'(x)=-\int_0^1(1-2x)f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1(1-2x)\mathrm{d}f(x)$$

$$=-(1-2x)f(x)\big|_0^1-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(1)+f(0)-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,,$$

所以

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x\,.$$

5.3.14　（1）只要证 $F(x)$ 在 $x=0$ 右连续即可．事实上，由洛必达法则

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to0^+}x^n f(x)=0=F(0)\,,$$

右连续得证.

（2）当 $x\in(0,+\infty)$ 时，

$$F'(x)=\frac{x^{n+1}f(x)-\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t}{x^2}\,,$$

再由积分中值定理，得

$$x^{n+1}f(x)-\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t=x^{n+1}f(x)-x\xi^n f(\xi)=x[x^n f(x)-\xi^n f(\xi)]\,,$$

其中 $0<\xi<x$．再设 $G(x)=x^n f(x)$，则

$$G'(x)=nx^{n-1}f(x)+x^n f'(x)\geqslant 0,$$

从而 $G(x)=x^n f(x)$ 在 $x>0$ 单增，从而 $G(x)\geqslant G(\xi)$，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$F'(x)\geqslant 0$.

5.3.15　（1）根据积分对区间的可加性，有

$$\int_0^{2a} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{2a} f(x)\mathrm{d}x.$$

对于积分 $\int_a^{2a} f(x)\mathrm{d}x$，令 $x=2a-t$，当 $x=a$ 时，$t=a$；当 $x=2a$ 时，$t=0$. $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，因此

$$\int_a^{2a} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(2a-y)(-\mathrm{d}t)=\int_0^a f(2a-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(2a-x)\mathrm{d}x,$$

故有

$$\int_0^{2a} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(2a-x)\mathrm{d}x,$$

结论得证.

解　（2）由（1）有，

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

5.3.16　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最大值 M 和最小值 m. 于是，在 $[a,b]$ 上，$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$. 根据定积分的性质有

$$\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x,$$

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$，根据上式，有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$.

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\neq 0$，上式两边同除 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，得

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\leqslant M,$$

于是，由中值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=f(\xi),$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

5.3.17　由积分中值定理可知，存在 $x_0 \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $\cos^2 x_0 f(x_0)=0$，但 $\cos^2 x_0 \neq 0$，所以 $f(x_0)=0$.

令 $F(x)=\cos^2 x f(x)$，则 $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且 $F(x_0)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，从而由罗尔定理知存在 $\xi \in \left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right) \subset \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$F'(\xi) = -2\sin\xi\cos\xi\, f(\xi) + \cos^2\xi\, f'(\xi) = 0 ,$$

从而结论 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$ 成立.

5.3.18　**证法 1**　作辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \cdot \int_a^x \dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t - (x-a)^2$，

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f(x)\cdot\int_a^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \cdot \frac{1}{f(x)} - 2(x-a) \\
&= \int_a^x \frac{f(x)}{f(t)}\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{f(t)}{f(x)}\mathrm{d}t - \int_a^x 2\mathrm{d}t \\
&= \int_a^x \left(\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2\right)\mathrm{d}t \geqslant 0,
\end{aligned}$$

其中上面用到结果：由于 $f(x)>0$，从而 $\dfrac{f(x)}{f(t)}+\dfrac{f(t)}{f(x)} \geqslant 2$. 所以，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加. 又 $F(a)=0$，所以，$F(b) \geqslant F(a)=0$. 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2 .$$

证法 2　由柯西−施瓦兹不等式

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x &= \int_a^b [\sqrt{f(x)}]^2\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right]^2 \mathrm{d}x \\
&\geqslant \left[\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right]^2 = (b-a)^2.
\end{aligned}$$

5.3.19　由积分中值定理可知，存在 $\xi_1 \in [0,a]$，$\xi_2 \in [a,b]$，使得

$$b\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = baf(\xi_1)，\quad a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = a(b-a)f(\xi_2) ,$$

由于 $f(x)$ 单调减少，且 $\xi_1 \leqslant \xi_2$，因此 $f(\xi_1) \geqslant f(\xi_2) > 0$，故有

$$baf(\xi_1) > a(b-a)f(\xi_2) ,$$

从而不等式 $b\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x > a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 成立.

5.3.20　由 $A=\int_0^1(ax^2+bx+c-2\sqrt{x})\mathrm{d}x=\dfrac{5}{6}$，得

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=\frac{13}{6} \tag{1}$$

由 $g(1)=2$，得

$$a+b+c=2, \tag{2}$$

由 $f'(1)=g'(1)$ 得

$$2a+b=1, \tag{3}$$

联立式（1）、式（2）和式（3），解得 $a=2$， $b=-3$， $c=3$．

5.3.21　体积

$$V(t)=\pi\int_t^{2t}(\sqrt{2x-x^2})^2\mathrm{d}x=\pi\left(3t^2-\frac{7}{3}t^3\right),$$

且 $V'(t)=\pi(6t-7t^2)$，令 $V'(t)=0$，得 $t=\dfrac{6}{7}$． $V''(t)=\pi(6-14t)$， $V''\left(\dfrac{6}{7}\right)<0$，从而 $t=\dfrac{6}{7}$ 为极大值点，也为最大值点，从而 $t=\dfrac{6}{7}$ 时， $V(t)$ 最大.

5.3.22　面积由两部分构成，即

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin2\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{\pi-1}{4}.\end{aligned}$$

5.3.23　由于

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\sqrt{\sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\sqrt{2(1-\cos\theta)}\mathrm{d}\theta,$$

所以

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8.$$

5.3.24　把球提出水面的力等于球露出水面部分的重量，其数值等于球露出水面部分的体积．由平行截面面积为已知的立体的体积的公式（也可用旋转体体积公式），得把球提出水面的力为

$$F=\frac{2}{3}\pi+\int_0^h\pi(1-z^2)\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi+\pi\left(h-\frac{h^3}{3}\right),$$

其中 h 为球心向上的移动距离， z 轴过球心方向向下．将球从水面取出所作的功为

$$W=\int_0^1\left[\frac{2}{3}\pi+\pi\left(h-\frac{h^3}{3}\right)\right]\mathrm{d}h=\frac{13}{12}\pi.$$

5.3.25　以薄板的直角的顶点为原点，x 轴的方向铅直向下建立坐标系．用定积分的元素法可得，水压力元素为

$$\mathrm{d}P=\rho gx(h-x)\frac{b}{h}\mathrm{d}x,$$

于是薄板所受的水压力为

$$P=\int_0^h \rho gx(h-x)\frac{b}{h}\mathrm{d}x=\frac{\rho g}{6}bh^2.$$

5.3.26　以圆板的圆心为坐标原点，x 轴的方向铅直向下建立坐标系．用定积分的元素法可得，水压力元素为

$$\mathrm{d}P=2\rho g(x+b)\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x,$$

于是水压力为

$$P=\int_{-a}^{a}2\rho g(x+b)\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\pi\rho ga^2b.$$

5.5　综合提高训练

例 5.5.1　计算定积分

$$I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x\qquad (n\in N).$$

解　因为 $0\leqslant \mathrm{e}^{-2n\pi}\leqslant x\leqslant 1$，

$$\begin{aligned}I&=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|-\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right|\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|-\sin(\ln x)\right|\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin(\ln x)\right|\mathrm{d}(\ln x),\end{aligned}$$

令 $\ln x=u$，则

$$\begin{aligned}I&=\int_{-2n\pi}^{0}|\sin u|\mathrm{d}u\\&=\int_{-\pi}^{0}|\sin u|\mathrm{d}u+\int_{-2\pi}^{-\pi}|\sin u|\mathrm{d}u+\int_{-3\pi}^{-2\pi}|\sin u|\mathrm{d}u+\cdots+\int_{-2(n-1)\pi}^{-2(n-2)\pi}|\sin u|\mathrm{d}u+\int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi}|\sin u|\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

对于 $\int_{-2\pi}^{-\pi}|\sin u|\mathrm{d}u$，令 $u=t-\pi$，则

$$\begin{aligned}\int_{-2\pi}^{-\pi}|\sin u|\mathrm{d}u&=\int_{-\pi}^{0}|\sin(t-\pi)|\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{0}|\sin t|\mathrm{d}t\\&=\int_{-\pi}^{0}|\sin u|\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

类似地，右边从第三项起每一个积分通过变换都可以化作 $\int_{-\pi}^{0}|\sin u|\mathrm{d}u$．于是

$$I=2n\int_{-\pi}^{0}|\sin u|\mathrm{d}u=-2n\int_{-\pi}^{0}\sin u\mathrm{d}u=2n\cos u\Big|_{-\pi}^{0}=4n.$$

例 5.5.2　设函数 $f(x)$ 在实数域 R 内连续，且满足 $\int_0^x t\,f(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan(x^2)$，已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

分析　由于被积函数中同时含有积分变量 t 和 x，因此需要进行积分变量替换.

解　令 $u=2x-t$，则 $t=2x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，当 $t=0$ 时，$u=2x$；当 $t=x$ 时，$u=x$. 因此

$$\int_0^x t\,f(2x-t)\mathrm{d}t=-\int_{2x}^x(2x-u)\,f(u)\mathrm{d}u=\int_x^{2x}(2x-u)\,f(u)\mathrm{d}u$$

$$=2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}u\,f(u)\mathrm{d}u,$$

因此

$$2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}u\,f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\arctan(x^2).$$

等式两边同时对 x 求导数，得

$$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u+2x[f(2x)\cdot 2-f(x)]-[2xf(2x)\cdot 2-xf(x)]=\frac{1}{1+x^4}x,$$

$$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-xf(x)=\frac{1}{1+x^4}x,$$

从而

$$\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[xf(x)+\frac{x}{1+x^4}\right].$$

令 $x=1$ 得，$\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[f(1)+\frac{1}{2}\right]=\frac{3}{4}$，所以，$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$.

例 5.5.3　设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，$f(1)=\frac{5}{2}$，且对所有的 x，$t\in(0,+\infty)$，满足条件

$$\int_0^{xt}f(u)\mathrm{d}u=t\int_1^x f(u)\mathrm{d}u+x\int_1^t f(u)\mathrm{d}u,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

解　由题意可知，等式的每一项都是 x 的可导函数. 在等式两边对 x 求导，得

$$tf(xt)=tf(x)+\int_1^t f(u)\mathrm{d}u,$$

令 $x=1$，由 $f(1)=\frac{5}{2}$，得

$$tf(t)=\frac{5}{2}t+\int_1^t f(u)\mathrm{d}u,$$

则 $f(t)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的可导函数. 再对上式两边关于 t 求导，得

$$f(t)+tf'(t)=\frac{5}{2}+f(t),$$

整理有 $f'(t)=\frac{5}{2t}$，积分，得

$$f(t)=\frac{5}{2}\ln t+C,$$

再由 $f(1)=\frac{5}{2}$，得 $C=\frac{5}{2}$．从而 $f(x)=\frac{5}{2}(\ln x+1)$．

例 5.5.4　已知 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，其中 $n\geqslant 1$ 为正整数，证明：

（1）数列 $\{a_n\}$ 收敛；

（2）当 $n>2$ 时，$a_n+a_{n-2}=\frac{1}{n-1}$；

（3）$\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$；

（4）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$.

解　（1）当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$0<\tan x<1$，则 $0<\tan^{n+1}x<\tan^n x$，所以

$$0<a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}x\mathrm{d}x<a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=a_n,$$

从而 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界，所以数列 $\{a_n\}$ 收敛.

（2）当 $n>2$ 时，

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\cdot(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}(\tan x)-a_{n-2},\end{aligned}$$

因此

$$a_n+a_{n-2}=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n-1}.$$

（3）由（2）题的结果知，当 $n>2$ 时，有

$$a_n+a_{n-2}=\frac{1}{n-1},$$

又由（1）题的结果知 $\{a_n\}$ 单调递减，所以

$$2a_n<\frac{1}{n-1}<2a_{n-2},$$

故有 $a_n<\frac{1}{2(n-1)}$，$\frac{1}{2(n-1)}<a_{n-2}$，从而 $\frac{1}{2(n+1)}<a_n$，结论得证.

（4）由（3）有，$\frac{n}{2(n+1)}<na_n<\frac{n}{2(n-1)}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n-1)}=\frac{1}{2}$，从而由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\frac{1}{2}$.

例 5.5.5　设函数 $f(x)$ 在 $(-L,L)$ 内连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(x)\neq 0$.

（1）证明：对于任意给定的 $0<x<L$，存在 $0<\theta<L$，使得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = x[f(\theta x)-f(-\theta x)];$$

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

解　（1）令 $t=-u$，则 $\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^x f(-u)\,\mathrm{d}u$，从而由中值定理得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x [f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t = x[f(\theta x)-f(-\theta x)].$$

（2）由（1）题结果有

$$\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}=\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}.$$

一方面，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}&=\theta\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{\theta x}\\&=\theta\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(\theta x)-f(0)}{\theta x}-\frac{f(-\theta x)-f(0)}{\theta x}\right]\\&=2\theta f'(0);\end{aligned}$$

另一方面，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=f'(0).$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$.

例 5.5.6　设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续、单调减少且取非负，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,\cdots)$$

证明数列 $\{a_n\}$ 极限存在.

证　由已知，在区间 $[k,k+1]$ 上有

$$f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k),$$

从而由积分中值定理有

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k).$$

一方面，

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x\right]+f(n)\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以，数列$\{a_n\}$有下界.

另一方面，

$$a_{n+1}-a_n=\left(\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n}f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$单调减少，从而有数列$\{a_n\}$极限存在.

例 5.5.7　【2003 年北京市竞赛题】设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$1\leqslant f(x)\leqslant 3$，证明：

$$1\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{3}.$$

证　由柯西-施瓦兹不等式有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1\sqrt{f(x)}\,\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2=1.$$

又由于$[f(x)-1][f(x)-3]\leqslant 0$，故有

$$\frac{[f(x)-1][f(x)-3]}{f(x)}\leqslant 0,$$

即

$$f(x)+\frac{3}{f(x)}\leqslant 4,$$

从而

$$\int_0^1\left[f(x)+\frac{3}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\leqslant 4\quad.$$

由初等不等式$ab\leqslant\dfrac{(a+b)^2}{4}$，得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{3}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2}{4}\leqslant 4.$$

综上

$$1\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{3}.$$

例 5.5.8　【2006（2）】已知曲线L的方程$\begin{cases}x=t^2+1\\ y=4t-t^2\end{cases}\ (t\geqslant 0)$.

（1）讨论L的凹凸性；

（2）过点$(-1,0)$引L的切线，求切点(x_0,y_0)，并写出切线的方程；

（3）求此切线与L（对应于$x\leqslant x_0$的部分）及x轴所围成的平面图形的面积。

解　（1）求出函数的二阶导数即可判断函数的凹凸性：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{4-2x}{2t}=\frac{2-t}{t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=-\frac{1}{t^3},$$

又 $t\geqslant 0$， $x\geqslant 1$ 即 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$，故曲线在 $x\in[1,+\infty]$ 上是凸的.

（2）设切点为 (x_0,y_0)，由（1）得切线斜率为 $\frac{2-t_0}{t_0}$，切线为 $y-y_0=\frac{2-t_0}{t_0}(x-x_0)$，又切线过（$-1$,0）点，可得

$$-(4t_0-t_0^2)=\frac{2-t_0}{t_0}(-1-t_0^2-1)\Rightarrow t_0^2+t_0-2=0$$

解得 $t_0=1$， $t_0=-2$（负值舍去)，即得切线方程 $y=x+1$.

（3）由平面图形面积公式得

$$S=\int_{-1}^{2}(x+1)\mathrm{d}x-\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_{-1}^{2}-\int_{1}^{2}(4\sqrt{x-1}-x+1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\times 3^2-\left[4\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+x\right]\Bigg|_1^2=\frac{9}{2}-\left(\frac{8}{3}-\frac{3}{2}+1\right)=\frac{7}{3}.$$

例 5.5.9　【2012（1）】已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t)\\y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\frac{\pi}{2}\right)$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$， $f'(t)>0\ \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲线 L 与 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

解　假设切点的坐标为 $(f(t),\cos t)$， 有切线方程 $y-\cos t=\frac{-\sin t}{f'(t)}[x-f(t)]$.

令 $y=0$ 可以得到切线与 x 轴交点横坐标为：

$$x=f(t)+\frac{f'(t)\cos t}{\sin t}.$$

所以根据题意，交点到切点的距离恒为 1 可以列方程

$$\sqrt{\left[\frac{f'(t)\cos t}{\sin t}\right]^2+\cos^2 t}=1.$$

所以有 $f'(t)=\frac{\sin^2 t}{\cos t},0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$. 从而

$$f(t)=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{\cos t}-\cos t\right)\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t+c.$$

又因为已知条件 $f(0)=0$ 可以得到 $c=0$，所以

$$f(t)=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t\ .$$

再根据面积计算公式可以得到

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\ .$$

注　这是一道曲线求解，以及后续的几何问题求解题目，由于切点必然在曲线 L 上，可以假设切点的坐标为 $(f(t),\cos t)$.

第 6 章　微 分 方 程

6.1　知 识 要 点

6.1.1　一阶微分方程及解法

形式：$y'=f(x,y)$ 或 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$．

1．可分离变量的微分方程

形式：$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$．

解法：将变量分离等式两端，两端同时积分即可，即

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

2．齐次方程

形式：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$．

解法：令 $u=\dfrac{y}{x}$，　$y=xu$，　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入齐次方程得：

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u,$$

化为可分离变量微分方程．分离变量后再积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

求出积分后回代 $u=\dfrac{y}{x}$，即可得到所给齐次方程的通解．

*3．可化为齐次的方程

形式：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$．

当 $c=c_1$ 时是齐次的，否则不是齐次的．

解法：在非齐次的情形下，作变换

$$x=X+h,\quad y=Y+k\ \text{（其中 }h\text{ 和 }k\text{ 为常数）},$$

将上面的非齐次方程变为齐次方程来解决．

4．一阶线性微分方程

形式：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$．

解法：（1）常数变易法；

（2）公式法：$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$.

其他形式：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+P(y)x=Q(y)$.

通解公式为：$x=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$.

***5．伯努利方程**

形式：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$.

解法：令 $z=y^{1-n}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则方程变为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

这是一个非齐次的一阶线性微分方程．可以用前面的方法进行求解，然后回代 $z=y^{1-n}$ 即可．

6.1.2　可降阶的高阶微分方程及解法

1．形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的微分方程

解法：方程两边对 x 依次连续积分 n 次，即可得到原方程的通解，该通解中含有 n 个相互独立的任意常数．

2．形如 $y''=f(x,y')$ 的微分方程

解法：令 $y'=p(x)$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$，代入方程得

$$p'=f(x,p),$$

这是一个关于变量 x 和 p 的一阶微分方程．求出通解为 $p=\varphi(x,C_1)$，而 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x,C_1)$，对其积分即可得到方程的通解 $y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$.

3．形如 $y''=f(y,y')$ 的微分方程

解法：令 $y'=p(y)$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程得 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$，这是关于变量 y 和 p 的一阶微分方程．求出通解为 $p=\varphi(y,C_1)$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1),$$

分离变量后，积分即可得通解为 $\int\dfrac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$.

6.1.3 二阶线性微分方程

形式：$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$．当 $f(x)\equiv 0$ 时，方程叫做齐次线性微分方程；当 $f(x)\neq 0$ 时，方程叫做非齐次线性微分方程．

1．二阶线性微分方程的解的结构

性质 1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个解，则 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是该方程的解，其中 C_1、C_2 是任意实数．

性质 2 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个线性无关的解，则 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是该方程的通解，其中 C_1、C_2 是任意实数．

注 对于区间 I 上的 n 个函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$，若存在 n 个不全为 0 的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得当 $x\in I$ 时有恒等式

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)\equiv 0,$$

则称 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 在区间 I 上**线性相关**，否则称为**线性无关**．

性质 3 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的两个特解，那么 $y_1(x)-y_2(x)$ 是对应齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解．

性质 4 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解，$Y(x)$ 是对应的齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解，那么 $y(x)=y^*(x)+Y(x)$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的通解．

性质 5（叠加原理） 若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 分别是微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x),\quad y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的解，那么 $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$ 是微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的解．

2．二阶常系数齐次线性微分方程的解

形式：$y''+py'+qy=0$，其中 p 和 q 均为常数．

特征方程：$r^2+pr+q=0$．

解法：二阶常系数齐次线性微分方程的特征方程与解的关系如下：

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1、r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1、r_2	$y=C_1\mathrm{e}^{r_1}+C_2\mathrm{e}^{r_2}$
两个相同的实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$	$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

3．二阶常系数非齐次线性微分方程的解

形式：$y''+py'+qy=f(x)$，其中 p 和 q 为常数．

解法：对于非齐次线性微分方程，只需求出一个特解，再求出其对应的齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，将两者相加即为常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解．

方法：求特解有多种方法，常用的有待定系数法．

非齐次线性微分方程的右端函数类型与特征根及特解的关系如下：

$f(x)$ 的类型	特征根	特解的形式
$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$	λ 不是特征方程的根	$y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)$
	λ 是特征方程的单根	$y^*=xe^{\lambda x}Q_m(x)$
	λ 是特征方程的重根	$y^*=x^2e^{\lambda x}Q_m(x)$
$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x$ $+P_n(x)\sin\omega x]$	$\lambda\pm i\omega$ 不是特征方程的根	$y^*=e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$
	$\lambda\pm i\omega$ 是特征方程的共轭复根	$y^*=xe^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$

这里 $P_m(x)$ 为已知的 m 次多项式；$Q_m(x)$ 为待定的 m 次多项式；$P_l(x)$ 为已知的 l 次多项式；$P_n(x)$ 为已知的 n 次多项式；$R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$ 为两个待定的 m 次多项式，$m=\max\{l,n\}$.

6.1.4　高阶线性微分方程

形式： $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 都是常数.

特征方程： $r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$.

解法： 根据特征方程的根，可以写出其对应的微分方程的解如下：

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项：Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
k 重实根 r	给出 k 项：$e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出 $2k$ 项：$e^{rx}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

n 阶常系数齐次线性微分方程的通解

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n.$$

6.1.5　欧拉方程

形式： $x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$，其中 p_1，p_2，$\cdots$，p_n 是常数.

解法： 作代换：$x=e^t$ 或 $t=\ln x$，得

$$x\frac{dy}{dx}=x\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}=Dy,$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=D(D-1)y,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}=D(D-1)\cdots(D-n+1)y,$$

代入原方程，将原方程化为以 t 为自变量的常系数线性微分方程，在求出这个方程的解后，把 t 换为 $\ln x$，即求得原方程的解.

6.2　典型例题分析

6.2.1　题型一、一阶微分方程的求解

例 6.2.1　求下列方程的通解：

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+x+y^2+xy^2$；　　（2）$x\ln y\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$；

（3）$x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=2\sqrt{xy}$；　　（4）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^4+y^3}{xy^2}$.

解　（1）原方程变为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+x)(1+y^2)$. 分离变量得$\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1+x)\mathrm{d}x$，两端积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int(1+x)\mathrm{d}x,$$

解得

$$\arctan y=x+\frac{x^2}{2}+C,$$

因此方程的通解为$\arctan y=x+\dfrac{x^2}{2}+C$，其中$C$为任意常数.

（2）将方程$x\ln y\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x\ln x}y=\frac{1}{x},$$

其为一阶线性非齐次微分方程. 由于$P(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$，$Q(x)=\dfrac{1}{x}$，因此方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+C\right).$$

（3）将方程化为齐次方程的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=2\sqrt{\frac{y}{x}},$$

令$u=\dfrac{y}{x}$，则$y=xu$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入上式得$x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2u=2\sqrt{u}$，化简整理并分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}-u}=\frac{2}{x}\mathrm{d}x,$$

两端积分，得

$$-2\ln\left|1-\sqrt{u}\right|=2\ln|x|-2\ln|C|,$$

即

$$x(1-\sqrt{u})=C.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 回代，得原方程的通解为

$$x-\sqrt{xy}=C.$$

（4）方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^4+y^3}{xy^2}$ 变为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x}y=\dfrac{x^3}{y^2}$，此为伯努利方程．令 $z=y^3$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=3y^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入原方程整理得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{3z}{x}=3x^3.$$

该方程为一阶非齐次线性微分方程，因此方程的通解为

$$z=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\left(\int 3x^3\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=x^3(3x+C).$$

而 $z=y^3$，因此原方程的通解为 $y^3=x^3(3x+C)$．

例 6.2.2　设有微分方程 $\begin{cases}y'+y=Q(x)\\ y(0)=0\end{cases}$，试求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$，使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足所给方程及初始条件，其中 $Q(x)=\begin{cases}2, x<1\\ 0, x>1\end{cases}$．

解　这是一阶线性微分方程，由公式有

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}(C_1+2\mathrm{e}^x) & x<1\\ C_2\mathrm{e}^{-x} & x>1\end{cases}=\begin{cases}C_1\mathrm{e}^{-x}+2 & x<1\\ C_2\mathrm{e}^{-x} & x>1\end{cases}.$$

由 $y(0)=0$，得 $C_1=-2$．又要求 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，因此

$$\lim_{x\to1^-}(C_1\mathrm{e}^{-x}+2)=\lim_{x\to1^+}C_2\mathrm{e}^{-x},$$

从而得 $C_2=2(\mathrm{e}-1)$，因此

$$y=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}(-2+2\mathrm{e}^x) & x<1\\ 2(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-x} & x>1\end{cases}=\begin{cases}2-2\mathrm{e}^{-x} & x<1\\ 2(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-x} & x>1\end{cases}.$$

补充定义函数值 $y|_{x=1}=2-2\mathrm{e}^{-1}$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=\begin{cases}2-2\mathrm{e}^{-x} & x\leqslant1\\ 2(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-x} & x>1\end{cases}$ 就满足题目的全部条件．

例 6.2.3　设 $y=f(x)$ 可导，且满足 $f(x)=1-\int_1^x\dfrac{2f(t)}{f^2(t)-6t}\mathrm{d}t$，求函数 $y=f(x)$．

解　方程两边关于 x 求导，得

$$f'(x)=\frac{2f(x)}{f^2(x)-6x},$$

且 $f(1)=1$，即

$$y'=\frac{2y}{y^2-6x}.$$

方程可化成 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{3x}{y}=-\dfrac{y}{2}$，这是以 y 为自变量，以 x 为因变量的一阶线性非齐次微分方程，其中 $P(y)=-\dfrac{3}{y}$，$Q(y)=-\dfrac{y}{2}$，因此方程的通解为

$$\begin{aligned}x&=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=\mathrm{e}^{\int\frac{3}{y}\mathrm{d}y}\left(-\int\frac{y}{2}\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)\\&=y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)=\frac{1}{2}y^2+Cy^3,\end{aligned}$$

将 $x=1$，$y=1$ 代入得 $C=\dfrac{1}{2}$．从而所求函数 $y=f(x)$ 为 $x=\dfrac{1}{2}(y^2+y^3)$ 所确定的隐函数.

例 6.2.4　设 $y=f(x)$ 为可导函数，且满足 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，$f'(0)=2$，求函数 $f(x)$.

解　令 $y=0$，得 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(0)}{1-f(x)f(0)}$，整理得 $f(0)[1+f^2(x)]=0$，从而 $f(0)=0$．固定 x，对等式两边关于 y 求导，得

$$f'(x+y)=\frac{f'(y)[1-f(x)f(y)]-[f(x)+f(y)][-f(x)f'(y)]}{[1-f(x)f(y)]^2},$$

令 $y=0$，结合条件 $f'(0)=2$ 及 $f(0)=0$ 得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{f'(0)[1-f(x)f(0)]-[f(x)+f(0)][-f(x)f'(0)]}{[1-f(x)f(0)]^2}=f'(0)+f^2(x)f'(0)\\&=2[1+f^2(x)],\end{aligned}$$

即问题转化为求解微分方程

$$\begin{cases}y'=2(1+y^2)\\ y(0)=0\end{cases}.$$

分离变量求解得 $\arctan y=2x+C$，由 $f(0)=0$，得 $C=0$．从而所求函数 $y=\mathrm{e}^x(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x)$ 为 $y=f(x)=\tan 2x$.

6.2.2　题型二、高阶微分方程的求解

例 6.2.5　求解下列微分方程的通解或在初始条件下的特解.

（1）$y''-y'^2=1$.

（2）$yy''-2yy'\ln y=y'^2$，$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=1$.

（3）$y''-a(y')^2=0$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=-1$.

解　（1）此方程不显含 y，因此令 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入原方程可得

$$p' - p^2 = 1,$$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p^2+1} = \mathrm{d}x$．解得

$$\arctan p = x + C_1,$$

也就是

$$p = \tan(x + C_1),$$

所以 $y' = \tan(x + C_1)$，从而原方程的通解为：

$$y = \int (\tan x + C_1)\mathrm{d}x = -\ln\left|\cos(x + C_1)\right| + C_2 .$$

（2）方程不显含 x，因此令 $y' = p(y)$， $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，将其代入原方程得

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - 2yp\ln y = p^2,$$

由初值可以得到 $p \neq 0$．于是方程变为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{y}p = 2\ln y .$$

这是一阶线性微分方程，由公式可得

$$p = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int 2\ln y \cdot \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C_1\right] = y\left[\int 2\frac{\ln y}{y}\mathrm{d}y + C_1\right] = y(\ln^2 y + C_1) .$$

由 $y|_{x=0}=1$， $y'|_{x=0}=1$，得 $C_1 = 1$， $p = y(\ln^2 y + 1)$，也就是

$$y' = y(\ln^2 y + 1),$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(\ln^2 y + 1)} = \mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\arctan \ln y = x + C_2 .$$

由 $y|_{x=0}=1$，得 $C_2 = 0$，得 $\arctan\ln y = x$，从而得特解为 $y = \mathrm{e}^{\tan x}$．

（3）令 $p = y'$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，原方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - ap^2 = 0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p^2} = a\mathrm{d}x$．积分得

$$-\frac{1}{p} = ax + C_1 .$$

因为 $p\big|_{x=0} = y'\big|_{x=0} = -1$，所以 $C_1 = 1$，从而 $-\dfrac{1}{y'} = ax + 1$，即 $\mathrm{d}y = -\dfrac{\mathrm{d}x}{ax+1}$，故

$$y = -\frac{1}{a}\ln(ax + 1) + C_2 .$$

又因为 $y\big|_{x=0}=0$，故 $C_2=0$．因此所求的特解为 $y=-\dfrac{1}{a}\ln(ax+1)\ (a\neq 0)$．

例 6.2.6　求下列微分方程的通解：

（1）$y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{ax}$（$a$ 为实数）；　　（2）$y''+y=\sin x-2\mathrm{e}^{-x}$．

解　（1）先求对应的齐次方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解，它的特征方程为

$$r^2+4r+4=0,$$

解得特征根为 $r_1=r_2=-2$，于是对应的齐次线性微分方程的通解为

$$\tilde{y}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

求非齐次线性微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{ax}$ 的一个特解．当 $a\neq -2$ 时，这里其右端 $\displaystyle\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=2\int x\mathrm{d}x=$ e^{ax}，由于 a 不是特征方程的单根，所以设特解为

$$y^*=A\mathrm{e}^{ax},$$

将其代入原方程解得 $A=\dfrac{1}{(a+2)^2}$．于是求得非齐次线性方程的一个特解为 $y^*=\dfrac{1}{(a+2)^2}\mathrm{e}^{ax}$，从而所求的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{(a+2)^2}\mathrm{e}^{ax},$$

其中 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 和 $\displaystyle\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y=\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ 为任意常数．当 $a=-2$ 时，这里其右端 $\displaystyle\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=2\int x\mathrm{d}x=$ $\mathrm{e}^{ax}=\mathrm{e}^{-2x}$，由于 $a=-2$ 是特征方程的重根，所以设特解为

$$y^*=Ax^2\mathrm{e}^{-2x},$$

将其代入原方程解得 $A=\dfrac{1}{2}$．于是求得非齐次线性方程的一个特解为 $y^*=\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}$，从而所求的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x},$$

其中 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 和 $\displaystyle\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y=\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ 为任意常数．

（2）对应的齐次微分方程为 $y''+y=0$，特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r=\pm\mathrm{i}$，所以通解为 $\tilde{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$．

设 $y''+y=\sin x-2\mathrm{e}^{-x}$ 的特解为 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)+C\mathrm{e}^{-x}$，将其代入原方程，比较等式两端同类项的系数，解得 $A=-\dfrac{1}{2}$，$B=0$，$C=-1$．所以

$$y^*=-\frac{1}{2}x\cos x-\mathrm{e}^{-x},$$

因此原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x-\mathrm{e}^{-x}$．

例 6.2.7　求欧拉方程 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$ 的通解.

解　令 $x=\mathrm{e}^t$，则 $xy'=Dy$，$x^2y''=D(D-1)y$，$x^3y'''=D(D-1)(D-2)y$，代入原方程，整理得，

$$(D^3-2D^2-3D)y=3\mathrm{e}^{2t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3\mathrm{e}^{2t}, \tag{*}$$

特征方程 $r^3-2r^2-3r=0$，特征根为 $r_1=0$，$r_2=-1$，$r_3=3$．从而（*）对应的齐次方程的通解为

$$\tilde{y}=C_1+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{3t}.$$

特解设为 $y^*=A\mathrm{e}^{2t}$，代入（*），求得 $A=\dfrac{1}{2}$，从而特解为 $y^*=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$．综上，（*）的通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}.$$

将 $x=\mathrm{e}^t$ 代回得到原方程的通解为

$$y=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3+\frac{1}{2}x^2.$$

例 6.2.8　若 $\begin{cases}y''+2my'+n^2y=0\\ y(0)=a,y'(0)=b\end{cases}$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$（其中 a,b,m,n 为常数，$m>n>0$）.

解　特征方程为 $r^2+2mr+n^2=0$，解得特征根为 $r_{1,2}=-m\pm\sqrt{m^2-n^2}$，且

$$r_1+r_2=-2m,\quad r_1r_2=n^2.$$

于是微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

由已知条件 $y(0)=a$，$y'(0)=b$ 得到

$$C_1+C_2=a,\quad r_1C_1+r_2C_2=b.$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}(C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x})\mathrm{d}x=-\frac{C_1}{r_1}-\frac{C_2}{r_2}=-\frac{r_2C_1+r_1C_2}{r_1r_2}\\&=-\frac{1}{r_1r_2}[(r_1+r_2)(C_1+C_2)-(r_1C_1+r_2C_2)]\\&=-\frac{1}{n^2}(-2ma-b)=\frac{2ma+b}{n^2}.\end{aligned}$$

6.2.3　题型三、利用通解性质求解相关问题

例 6.2.9　【2016（1,3）】若 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$（　　）.

（A）$3x(1+x^2)$；　（B）$-3x(1+x^2)$；　（C）$\dfrac{x}{1+x^2}$；　（D）$-\dfrac{x}{1+x^2}$．

解　由已知 $y_2-y_1=2\sqrt{1+x^2}$ 是一阶齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的解．而 $(y_2-y_1)'=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$，代入 $y'+p(x)y=0$，解得 $p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$．

另外 $y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的特解．$y_2'=4x(1+x^2)+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，代入方程 $y'+p(x)y=q(x)$，解得 $q(x)=3x(1+x^2)$．因此正确选项为（A）．

例 6.2.10　已知 $y_1=xe^x+e^{-x}$，$y_2=xe^x+e^{2x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程．

解法 1　由已知 $y_2-y_1=e^{2x}-e^{-x}$，$y_2-y_3=e^{-x}$ 是二阶常系数线性齐次微分方程的解，而且 $(y_2-y_1)+(y_2-y_3)=e^{2x}$ 也是该二阶齐次微分方程的解．

由于 e^{-x} 和 e^{2x} 线性无关，所以 $r_1=-1$，$r_2=2$ 是齐次微分方程的特征方程的根．因此特征方程为

$$(r+1)(r-2)=0,$$

即 $r^2-r-2=0$．所以二阶常系数线性齐次微分方程为

$$y''-y'-2y=0.$$

由于 $y_1=xe^x+e^{-x}$ 是非齐次方程的解，而 e^{-x} 是齐次方程的解，所以 $y^*=xe^x$ 是非齐次方程的解．设二阶常系数线性非齐次微分方程为

$$y''-y'-2y=f(x),$$

将 $y^*=xe^x$ 代入上面方程，可以得到

$$f(x)=(1-2x)e^x.$$

从而所求的二阶常系数线性非齐次微分方程为

$$y''-y'-2y=(1-2x)e^x.$$

解法 2　由题设可以得到 e^{2x} 及 e^{-x} 是相应的齐次方程的两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次方程的一个特解，故 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+xe^x$ 是所求方程的通解．由

$$y'=2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}+(1+x)e^x,\quad y''=4C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+(2+x)e^x,$$

消去 C_1 和 C_2 得所求方程为

$$y''-y'-2y=(1-2x)e^x.$$

***例 6.2.11**　已知 $y_1=e^{2x}$ 是方程 $(x^2+1)y''-2xy'-(ax^2+bx+c)y=0$ 的一个特解，试求 a、b、c 的值及此方程的通解．

解　由 $y_1=e^{2x}$ 得 $y_1'=2e^{2x}$，$y_1''=4e^{2x}$．代入方程得

$$e^{2x}(4x^2-4x+4)=e^{2x}(ax^2+bx+c).$$

比较两边系数得

$$a=4,\ b=-4,\ c=4.$$

从而原方程为

$$(x^2+1)y''-2xy'-(4x^2-4x+4)y=0 .$$

设 y_2 是方程的与 $y_1=\mathrm{e}^{2x}$ 线性无关的解，则 $y_2=\mathrm{e}^{2x}u(x)$．将 $y_2=\mathrm{e}^{2x}u(x)$ 代入方程有

$$(x^2+1)u''(x)+2(2x^2-x+2)u'(x)=0 .$$

该方程为可降阶的微分方程．令 $u'(x)=p$，则方程化为

$$(x^2+1)p'+2(2x^2-x+2)p=0 ,$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{2(2x^2-x+2)}{x^2+1}\mathrm{d}x ,$$

两边积分，解得

$$p=(x^2+1)\mathrm{e}^{-4x} .$$

所以

$$u(x)=\int(x^2+1)\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x} ,$$

从而

$$y_2==-\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{-2x} .$$

故原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{-2x} .$$

6.2.4　题型四、微分方程的应用

例 6.2.12　设对任意的 $x>0$，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，求 $y=f(x)$ 的表达式．

解　曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x) ,$$

令 $X=0$，得 y 轴上的截距为

$$Y=f(x)-xf'(x) .$$

再由题设可得

$$f(x)-xf'(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x .$$

即

$$xf(x)-x^2f'(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x .$$

对上式两边关于 x 求导，得

$$f(x)+xf'(x)-2xf'(x)-x^2f''(x)=f(x),$$

即

$$f'(x)+xf''(x)=0,$$

令 $f'(x)=p$，求解上面方程得 $p=\dfrac{C_1}{x}$，即 $f'(x)=\dfrac{C_1}{x}$，积分得

$$f(x)=C_1\ln x+C_2.$$

例 6.2.13　种植一颗高为 h_0 的小树，开始时小树长得比较慢，渐渐地小树长高了而且长得越来越快，几年不见，绿荫下可以乘凉了；但长到某一高度后，它的生长速度趋于稳定，然后再慢慢降下来．假设它的生长速度与当时的高度及这棵树的最大高度 H 和当时的高度之差成正比，求树的高度随时间变化的函数 $h(t)$．

解　由题意得：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=kh(t)[H-h(t)],\\ h(0)=h_0\end{cases}\qquad \text{其中 } k>0 \text{ 为比例系数.}$$

方程为可分离变量的微分方程．分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{h(t)[H-h(t)]}=k\mathrm{d}t,$$

两边积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}h(t)}{h(t)[H-h(t)]}=\int k\mathrm{d}t,$$

所求通解为

$$h(t)=\frac{H}{1+C\mathrm{e}^{-kHt}}.$$

将条件 $h(0)=h_0$ 代入通解中得 $C=\dfrac{H}{h_0}-1$．所以树的高度随时间变化的函数为

$$h(t)=\frac{H}{1+\left(\dfrac{H}{h_0}-1\right)\mathrm{e}^{-kHt}}.$$

例 6.2.14　冰雹在离地面一定高度的高空形成并开始下落，在下落的过程中，冰雹会不断融化而质量越来越小，其减少速率与其质量成正比．若该冰雹本来有 200g，着地后只有 100g 了，且已知它是经过了 10s 时间才着地的．求冰雹着地时的速度和它形成并开始下落时的高度．

解　由于冰雹的质量在运动过程中是不断变化的，所以牛顿第二运动定律在这里的变质量情况下是不适用的．根据动量守恒原理，可知在下落过程的某个时间段 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，有

$$mg\mathrm{d}t=\mathrm{d}(mv).$$

而 $\mathrm{d}(mv)=m\mathrm{d}v+v\mathrm{d}m$，从而上式化为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=mg.$$

再由题设条件 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-km$，上式可以变为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-kv=\mathrm{g}.$$

该方程满足初始条件 $v(0)=0$，从而求的特解为

$$v=\frac{g}{k}(\mathrm{e}^{kt}-1).$$

设 s 是冰雹下落的路程，根据 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{g}{k}(\mathrm{e}^{kt}-1)$ 可以求得在 10s 内冰雹下落的路程为

$$s=\int_0^{10}\frac{g}{k}(\mathrm{e}^{kt}-1)\mathrm{d}t=\frac{g}{k^2}(\mathrm{e}^{10k}-10k-1),$$

而着地的速度为

$$v=\frac{g}{k}(\mathrm{e}^{10k}-1).$$

由微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-km$ 以及条件 $m(0)=200$，可以求得 $k=200\mathrm{e}^{-kt}$． 又根据 $m(10)=100$，可以得到 $k=\dfrac{\ln 2}{100}$，再将 $k=\dfrac{\ln 2}{100}$ 代入到 $s=\dfrac{g}{k^2}(\mathrm{e}^{10k}-10k-1)$ 和 $v=\dfrac{g}{k}(\mathrm{e}^{10k}-1)$ 中得到冰雹落地时的速度为

$$v=\frac{9.81\times 10}{\ln 2}(2-1)=141.5\ （\mathrm{m/s}），$$

而冰雹形成并开始下落时的高度为

$$s=\frac{9.81\times 10^2}{(\ln 2)^2}(2-\ln 2-1)=626.5\ （\mathrm{m}）.$$

6.3 深 化 训 练

6.3.1 填空题

（1）设方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的通解为 $y=\dfrac{x}{\ln Cx}$ （C 为任意常数），则 $\varphi(x)=$________.

（2）【2006（1）】方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解为________.

（3）微分方程 $y\,\mathrm{d}x+(x^2-4x)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解为________.

（4）【2008（1，3）】微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解为 $y=$________.

（5）【2011（1）】微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为________.

（6）微分方程 $yy'-y^2=-2x$ 的通解为________.

（7）方程 $y''-y=0$ 的通解为________.

（8）方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解为________.

（9）微分方程 $y''-y'+y=0$ 的通解为________.

（10）方程 $y''-2y'=\mathrm{e}^{2x}$ 的特解形式为 $y^*=$________.

（11）设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$，且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合，则此函数为________.

（12）设 C_1 与 C_2 为任意常数，$y=(C_1+x)\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 是首项系数为 1 的某常系数二阶非齐次线性方程的通解，则该微分方程为________.

（13）微分方程 $y^{(5)}-4y^{(3)}=0$ 的通解为________.

（14）欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0\quad(x>0)$ 的通解为________.

（15）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$，则该函数满足的微分方程为________.

（16）【2007（1）】二阶常系数非齐次微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

（17）【2009（1）】若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2$，$y'(0)=0$ 的解为 $y=$________.

6.3.2　单项选择题

（1）设 y_1 和 y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，并设 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该微分方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则常数 λ 与 μ 应满足的充要条件是 $(\lambda,\mu)=$（　　）.

（A）$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$；　（B）$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$；　（C）$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$；　（D）$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

（2）设 $q(x)$ 满足 $y''+y'-\mathrm{e}^{\sin x}=0$，且 $f'(x_0)=0$，则 $q(x)$ 在（　　）.

（A）x_0 的某个邻域内单增；　（B）x_0 的某个邻域内单减；

（C）x_0 处取极小值；　（D）x_0 处取极大值.

（3）下列表达式属于二阶微分方程的通解的是（　　）.

（A）$y''=a^2C_1\mathrm{e}^{ax}+b^2C_2\mathrm{e}^{bx}$；　（B）$a^2C_1\mathrm{e}^{ax}+b^2C_2\mathrm{e}^{bx}$；

（C）$-(a+b)(aC_1\mathrm{e}^{ax}+bC_2\mathrm{e}^{bx})$；　（D）$+(ab)(C_1\mathrm{e}^{ax}+C_2\mathrm{e}^{bx})=0$.

（4）设 $p(x)$，$q(x)$ 与 $q(x)$ 均连续，已知 $y=(C_1+x)\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$，$y=(C_1+x)\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 与 $y_3=\mathrm{e}^{-x}$ 为方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的 3 个解，C_1 与 C_2 为任意常数，则该非齐次方程的通解为（　　）.

（A）$(C_1+C_2)y_1+(C_1-C_2)y_2-(C_1+C_2)y_3$；

（B）$(C_1-C_2)y_1+(C_2-C_1)y_2+(C_1-C_2)y_3$；

（C）$(C_1+C_2)y_1+(1-C_1)y_2-(1+C_2)y_3$；

（D）$(C_1-C_2)y_1+(1-C_1)y_2+C_2y_3$.

（5）设常系数线性微分方程方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$，其中 C_1 与 C_2 为任意常数，则 $a+b=$（　　）.

（A）-2；　（B）0；　（C）2；　（D）4.

6.3.3　求下列微分方程的通解或初始条件下的特解：

（1）$(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$；　（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-x+1}{x+y+5}$；

（3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x+y^3}$；（4）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=x^3y^3$；

（5）$y\,\mathrm{d}x-(x-\sqrt{-x^2+y^2})\,\mathrm{d}y=0$，$y>0$；（6）$xy'+y-y^2\ln x=0$；

（7）$xy''-y'=x^2$；（8）$y''=\dfrac{3}{2}y^2$，$y|_{x=3}=1$，$y'|_{x=3}=1$；

（9）$y''+4y=x\sin x+3$；（10）$y''+2y'+5y=\mathrm{e}^x\cos 2x$；

（11）$x^3\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+3x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=x\ln x$.

6.3.4 设 r_2 为二阶可微函数，且 $\int_0^x(x+1-t)f'(t)\mathrm{d}t=x^2+\mathrm{e}^x-f(x)$，求 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$.

6.3.5 已知函数 $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ 的图形是经过 $y''+py'+qy=f(x)$ 与 p 两点的一段向上凸的曲线弧，q 为该曲线上的任一点，弧 $y''+py'+qy=0$ 与弦 $y''+py'+qy=f(x)$ 之间的面积为 $f(x)$，试求函数 λ .

6.3.6 已知函数 $y=f(x)$ 的图形是经过 $A(0,4)$ 与 $C(2,0)$ 两点的一段向上凸的光滑曲线弧，$M(x,y)$ 为该曲线上的任一点，线段 $\overline{BM}$ 平行于 x 轴，B 点在 y 轴上，y 轴、弧 $\widehat{AM}$ 与线段 $\overline{BM}$ 之间的面积为 $\dfrac{2}{3}x^3$，试求函数 $y=f(x)$.

6.3.7 设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f'(0)=1$，对于任意的实数 a、b 都有等式 $f(a+b)=\mathrm{e}^a f(b)+\mathrm{e}^b f(a)$ 成立，求函数 $f(x)$.

6.3.8 【2012（3）】已知 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$，

（1）求函数 $f(x)$ 的表达式；

（2）求曲线的拐点 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t$.

6.3.9 【2008（2）】设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$. 对任意的 $t\in[0,+\infty)$，直线 $x=0$，$x=t$，曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体．若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

6.3.10 质量为 m 的潜艇在下降时，已知所受阻力与下降速度成正比，若潜艇由静止状态开始运动，求潜艇在时刻 t 下降的速度 $v(t)$ 和距离 $s(t)$.

6.4 深化训练详解

6.3.1 填空题

（1）$-\dfrac{1}{x^2}$. **提示** 由 $y=\dfrac{x}{\ln Cx}$ 得 $y'=\dfrac{1}{\ln Cx}-\dfrac{1}{\ln^2 Cx}$，代入得 $\varphi(\ln Cx)=-\dfrac{1}{\ln^2 Cx}$，从而 $\varphi(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

（2）$y=Cx\mathrm{e}^{-x}$. **提示** 当 $y\neq 0$ 时，$\int\dfrac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\dfrac{1-x}{x}\mathrm{d}x$，$\int\dfrac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x$.

因此 $\ln|y|=\ln|x|-x+C_1$．解得方程的通解为 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$，其中 C 为任意实数．当 $y=0$ 时，方程显然成立，可以认为上式中 $C=0$. 因此通解为 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$.

（3）$y=C\left(\dfrac{x}{4-x}\right)^{\frac{1}{4}}$．**提示**　当 $y=0$ 时，方程显然成立．当 $y\neq 0$ 时，

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{4x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{4-x}\mathrm{d}x,$$

因此

$$\ln|y|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right|+\ln|C|.$$

解得方程的通解为 $y=C\left(\dfrac{x}{4-x}\right)^{\frac{1}{4}}$，其中 C 为任意实数．

（4）$y=\dfrac{1}{x}$．分离变量，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，两边积分有

$$\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|,$$

因此方程的通解为 $xy=C$．利用条件 $y(1)=1$ 知 $C=1$，故满足条件的解为 $y=\dfrac{1}{x}$．

（5）$\mathrm{e}^{-x}\sin x$．**提示**　微分方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}\cos x\cdot\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}(C+\sin x),$$

由初值条件 $y(0)=0$ 得 $C=0$，所以方程的特解为 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$．

（6）$y=1+\dfrac{C}{x}$．**提示**　令 $y^2=u$，则 $2yy'=u'$，代入方程，有 $u'-2u=-4x$，一阶线性微分方程的解为

$$u=y^2=\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\left(-\int 4x\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=C\mathrm{e}^{2x}+2x+1.$$

（7）$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}$．**提示**　特征方程为 $r^2-1=0$，解得特征根为 $r_1=-1$，$r_2=1$．

（8）$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x}$．**提示**　特征方程是 $r^2-2r+1=0$，解得特征根为 $r_1=r_2=1$（二重实根）．

（9）$y=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$．**提示**　特征方程是 $r^2-r+1=0$，解得特征根为 $r_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$（一对共轭复根）．

（10）$Ax\mathrm{e}^{2x}$．**提示**　特征方程为 $r^2-2r=0$，解得特征根为 $r_1=0$，$r_2=2$．

（11）$y(x)=(1-2x)\mathrm{e}^{x}$．

（12）$y''+y'-2y=3\mathrm{e}^{x}$．**提示**　通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{x}$，可以得到特征根为 $r_1=1$，$r_2=-2$，从而特征方程为 $r^2+r-2=0$．对应的齐次方程为 $y''+y'-2y=0$．设非齐次方程为 $y''+y'-2y=f(x)$，将 $y^*=x\mathrm{e}^{x}$ 代入可以得到 $f(x)=3\mathrm{e}^{x}$．

（13）$y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\mathrm{e}^{-2x}+C_5\mathrm{e}^{2x}$．**提示**　特征方程是

$$r^5-4r^3=r^3(r^2-4)=0,$$

解得特征根为 3 重特征根 $r_{1,2,3}=0$ 以及单根 $r_4=-2$，$r_5=2$.

（14）$y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$. **提示**　令 $x=\mathrm{e}^t$，则 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，代入原方程，整理得 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=0$，得通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$.

（15）$f''(x)+f(x)=0$. **提示**　由 $f'(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 得 $f''(x)=-f'\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$，再在 $f'(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 中令 $x=\dfrac{\pi}{2}-u$，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)=f(u)$，即 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=f(x)$，从而 $f''(x)+f(x)=0$.

（16）$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$. **提示**　对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda+3=0,$$

解得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，则对应齐次方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}$. 设原方程的特解为 $y^*=A\mathrm{e}^{2x}$，代入原方程可得

$$4A\mathrm{e}^{2x}-8A\mathrm{e}^{2x}+3A\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{2x},$$

解得 $A=-2$，所以原方程的特解为 $y^*=-2\mathrm{e}^{2x}$，故原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}.$$

（17）$y=x(1-\mathrm{e}^x)+2$. **提示**　二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+b=(\lambda-1)^2=0$，从而 $a=-2$，$b=1$. 非齐次方程 $y''-2y'+y=x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+x+2$.

6.3.2　单项选择题

（1）（A）. **提示**　将 $\lambda y_1+\mu y_2$ 代入方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 得 $\lambda+\mu=1$，将 $\lambda y_1-\mu y_2$ 代入方程 $y'+p(x)y=0$ 得 $\lambda-\mu=0$，从而可以得到 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$.

（2）（C）. **提示**　将 $f'(x_0)=0$ 代入 $y''+y'-\mathrm{e}^{\sin x}=0$，得 $y''(x_0)=\mathrm{e}^{\sin x_0}>0$.

（3）（B）. **提示**　注意区别（D）选项，$y=\ln(C_1x)+\ln(C_2\sin x)$，因此有

$$y=\ln C_1+\ln C_2+\ln x+\ln\sin x=\ln x+\ln\sin x+C.$$

（4）（D）. **提示**　先验证（D）选项是非齐次微分方程的解，再验证是通解.

（5）（D）. **提示**　特征根为 $-1\pm\mathrm{i}$，从而特征方程为 $r^2+2r+2=0$. 方程为 $y''+2y'+2y=0$，$y''+2y'+5y=0$.

6.3.3　（1）将方程化为齐次方程的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-2xy-3x^2}{x^2-2xy}=\frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-2\dfrac{y}{x}-3}{1-2\dfrac{y}{x}},$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=xu$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入上式得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u^2-2u-3}{1-2u}$，化简整理并分离变量得

$$\frac{2u-1}{u^2-u-1}\mathrm{d}u=-\frac{3}{x}\mathrm{d}x,$$

两端积分，得

$$\ln\left|u^2-u-1\right|=-3\ln|x|+C_1,$$

即

$$x^3(u^2-u-1)=C.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 回代，得原方程的通解为

$$xy^2-x^2y-x^3=C.$$

（2）解方程组

$$\begin{cases} y-x+1=0 \\ x+y+5=0 \end{cases}$$

得 $x=-2$， $y=-3$．令 $X=x+2$， $Y=y+3$，代入原方程，得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{Y-X}{Y+X}=\frac{\dfrac{Y}{X}-1}{\dfrac{Y}{X}+1},$$

再令 $u=\dfrac{Y}{X}$，则 $Y=uX$， $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，代入上式得 $u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\dfrac{u-1}{u+1}$，化简整理并分离变量得

$$\frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u=-\frac{1}{X}\mathrm{d}X,$$

两端积分，得

$$\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln|X|+C,$$

将 $u=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{y+3}{x+2}$ 回代，得原方程的通解为

$$\arctan\frac{y+3}{x+2}+\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+3}{x+2}\right)^2\right]+\ln|x+2|=C.$$

（3）方程可化成 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y}x+y^2$，则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{y}x=y^2$，这是以 y 为自变量、以 x 为因变量的一阶非齐次线性微分方程，其中 $P(y)=-\dfrac{1}{y}$， $Q(y)=y^2$，因此方程的通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(\int y^2\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=y\left(\int y\mathrm{d}y+C\right)=y\left(\frac{1}{2}y^2+C\right)=\frac{1}{2}y^3+Cy.$$

此外 $y=0$ 也是方程的解.

（4）方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=x^3y^3$ 为伯努利方程．令 $z=y^{-2}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2y^{-3}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2xz-2x^3,$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2xz=-2x^3$．该方程为一阶非齐次线性微分方程，其中 $P(x)=-2x$，$Q(x)=-2x^3\int(-2x^3)\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$，因此方程的通解为

$$z=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\left[\int(-2x^3)\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{x^2}\left[\int(-2x^3)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{x^2}[(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}+C]=C\mathrm{e}^{x^2}+x^2+1.$$

而 $z=y^{-2}$，因此原方程的通解为 $y^2(C\mathrm{e}^{x^2}+x^2+1)=1$，此外 $y=0$ 也是方程的解.

（5）原方程可以变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x-\sqrt{-x^2+y^2}}{y}=\frac{x}{y}-\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

令 $u=\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，代入上式得 $u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=u-\sqrt{1-u^2}$，化简 $y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-\sqrt{1-u^2}$，分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=-\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，两端积分，得 $\arcsin u=-\ln|y|+C$．将 $u=\dfrac{x}{y}$ 回代，得原方程的通解为

$$\arcsin\frac{x}{y}+\ln|y|=C.$$

（6）方程整理为

$$y^{-2}y'+\frac{1}{x}y^{-1}=\frac{\ln x}{x}.$$

令 $u=y^{-1}$，则 $u'=-y^{-2}y'$，代入方程得 $-u'+\dfrac{1}{x}u=\dfrac{\ln x}{x}$，化为标准形式为

$$u'-\frac{1}{x}u=-\frac{\ln x}{x}.$$

因此通解为

$$u=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(-\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=x\left(-\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x+C\right)=x\left(\frac{\ln x+1}{x}+C\right)=\ln x+1+Cx.$$

回代 $u=y^{-1}$，故原方程的通解为 $y=\dfrac{1}{\ln x+1+Cx}$.

（7）此方程不显含 y，因此令 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入原方程可得

$$xp'-p=x^2,$$

即 $p'-\frac{1}{x}p=x$. 它是一阶线性非齐次微分方程．利用通解公式得：

$$p=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int x\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x(x+C)=x^2+Cx,$$

所以 $y'=x^2+Cx$，从而原方程的通解为

$$y=\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2.$$

（8）方程不显含 x，因此令 $y'=p(y)$，$y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，将其代入原方程得

$$2p\mathrm{d}p=3y^2\mathrm{d}y,$$

两边积分，得

$$p^2=y^3+C_1.$$

由 $y|_{x=3}=1$，$y'|_{x=3}=1$，得 $C_1=0$，$p=y^{\frac{3}{2}}$（因 $y'|_{x=3}=1>0$，故取正号），即

$$y^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$-2y^{-\frac{1}{2}}=x+C_2.$$

由 $y|_{x=3}=1$，得 $C_2=-5$，得特解为 $y=\frac{4}{(x-5)^2}$.

（9）对应的齐次微分方程为 $y''+4y=0$，特征方程为 $r^2+4=0$，特征根为 $r=\pm2i$，所以通解为 $\tilde{y}=C_1\cos2x+C_2\sin2x$.

设 $y''+4y=3$ 的特解为 $y_1^*=A$，则将其代入原方程，得 $y_1^*=\frac{3}{4}$；

设 $y''+4y=x\sin x$ 的特解为 $y_2^*=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$，将其代入原方程，比较等式两端同类项的系数，解得

$$y_2^*=-\frac{2}{9}\cos x+\frac{1}{3}x\sin x,$$

从而 $y''+4y=x\sin x+3$ 的特解为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}x\sin x-\frac{2}{9}\cos x,$$

原方程的通解为

$$y=C_1\cos2x+C_2\sin2x+\frac{3}{4}+\frac{x}{3}\sin x-\frac{2}{9}\cos x.$$

（10）特征方程为 $r^2+2r+5=0$，特征根为 $r=-1\pm2\mathrm{i}$. 所以通解为

$$\tilde{y}=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

这里 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos 2x=\mathrm{e}^x(\cos 2x+0\cdot\sin 2x)$，由于这里 $\lambda+\mathrm{i}\omega=1+2\mathrm{i}$ 不是特征方程的根，所以应设特解为

$$y^*=\mathrm{e}^x(a\cos 2x+b\sin 2x),$$

将其代入原方程，得

$$\mathrm{e}^x[(4a+8b)\cos 2x-(8a-4b)\sin 2x]=\mathrm{e}^x\cos 2x,$$

比较等式两端同类项的系数，得

$$\begin{cases}4a+8b=1\\-(8a-4b)=0\end{cases},$$

由此可得 $a=\dfrac{1}{20}$，$b=\dfrac{1}{10}$，于是求得一个特解为

$$y^*=\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{20}\cos 2x+\frac{1}{10}\sin 2x\right).$$

原方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{20}\cos 2x+\frac{1}{10}\sin 2x\right).$$

（11）令 $x=\mathrm{e}^t$，则

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Dy,\quad x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=D(D-1)y,\quad x^3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=D(D-1)(D-2)y,$$

代入原方程，整理得 $(D^3-1)y=t\mathrm{e}^t$，即

$$y^{(3)}-y=t\mathrm{e}^t, \tag{*}$$

特征方程 $r^3-1=0$，特征根为 $r_1=1$，$r_{2,3}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$．从而式（*）对应的齐次方程的通解为

$$\tilde{y}=C_1\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

特解设为 $y^*=t(at+b)\mathrm{e}^t$，代入式（*），求得 $a=\dfrac{1}{6}$，$b=-\dfrac{1}{3}$，从而特解为 $y^*=\dfrac{1}{6}t(t-2)\mathrm{e}^t$．

综上，式（*）的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{1}{6}t(t-2)\mathrm{e}^t.$$

所以，原方程的通解为

$$y=C_1x+\frac{1}{\sqrt{x}}\left[C_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+C_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]+\frac{1}{6}x\ln x(\ln x-2).$$

6.3.4　原方程整理为

$$(x+1)\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t-t\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=x^2+\mathrm{e}^x-f(x),$$

两边关于 $\int \frac{1}{y-2}\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$ 求导，得

$$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t + 2f'(x) = 2x + \mathrm{e}^x ,$$

继续对 $\int \frac{1}{y-2}\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$ 求导，得

$$2f''(x) + f'(x) = 2 + \mathrm{e}^x ,$$

且 $f(0)=1$，$f'(0)=\frac{1}{2}$．可得满足初始条件的特解为

$$f(x) = -3 + \frac{11}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 2x + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x .$$

6.3.5　方程两边关于 x 求导，得 $y' = \mathrm{e}^x + y$，即

$$y' - y = \mathrm{e}^x .$$

这是一阶线性非齐次微分方程，$P(x) = -1$，$Q(x) = \mathrm{e}^x$，因此方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] = \mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = \mathrm{e}^x(x+C) .$$

由于 $x=0$ 时，$y=1$，代入上式得 $C=1$．所以 $y=\mathrm{e}^x(x+1)$．

6.3.6　由题意得

$$\frac{2}{3}x^3 = \int_0^x y\mathrm{d}x - yx = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x - f(x)\cdot x ,$$

两边求导，得

$$2x^2 = f(x) - f(x) - xf'(x) ,$$

得到 $f'(x) = -2x$，得 $f(x) = -x^2 + C$；由 $f(0)=4$，得 $C=4$．所以

$$f(x) = -x^2 + 4 .$$

6.3.7　令 $a=b=0$，得 $f(0)=0$．

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x f(\Delta x) + \mathrm{e}^{\Delta x}f(x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x[f(\Delta x)-f(0)] + f(x)(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x} \\ &= \mathrm{e}^x + f(x) , \end{aligned}$$

即问题转化为求解微分方程

$$\begin{cases} y' = y + \mathrm{e}^x \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

这是一阶线性微分方程，解得 $f(x) = \mathrm{e}^x(C+x)$，由 $y(0)=0$，得 $C=0$．从而所求函数 $y = \mathrm{e}^x(C_1\sin 3x + C_2\cos 3x)$ 为 $y = f(x) = x\mathrm{e}^x$．

6.3.8　（1）由特征方程 $r^2+r-2=0$，得特征根 $r_1=-2$，$r_2=1$．从而通解为

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x,$$

代入 $f'(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 得 $C_1=0$，$C_2=1$．从而 $f(x)=\mathrm{e}^x$．

（2）$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，

$$y'=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+1,$$

$$y''=2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+4x^2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+2x=2(1+2x^2)\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+2x,$$

令 $y''=0$，得 $x=0$．当 $x<0$ 时，$y''<0$；当 $x>0$ 时，$y''>0$．故 $(0,0)$ 为曲线的拐点.

6.3.9　旋转体的体积 $V=\pi\int_0^t f^2(x)\mathrm{d}x$，侧面积 $S=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$，由题设知

$$\int_0^t f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

上式两端对 t 求导得

$$f^2(t)=f(t)\sqrt{1+f'^2(t)},$$

即 $y'=\sqrt{y^2-1}$.由分离变量法得

$$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=t+C_1,$$

即

$$y+\sqrt{y^2-1}=C\mathrm{e}^t,$$

将 $f(0)=1$ 代入知 $C=1$.故 $y+\sqrt{y^2-1}=\mathrm{e}^t$，解得 $y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})$，于是所求函数为

$$y=f(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}).$$

6.3.10　因为潜艇在下降时所受重力 mg 的方向与下降的速度 $v(t)$ 的方向一致，并受阻力 $R=-kv$（k 为比例系数且大于 0），负号是因为阻力的方向与 $v(t)$ 的方向相反，从而下降时潜艇所受的合力为 $F=mg-kv$.

根据牛顿第二定律 $F=ma$ 及 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$（这里 a 表示加速度），得微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv,$$

即

$$v'+\frac{k}{m}v=g,$$

这是一阶线性微分方程．通解为

$$v(t)=\mathrm{e}^{-\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}\left[\int g\mathrm{e}^{\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]=C\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}+\frac{mg}{k},$$

因为潜艇是由静止状态开始运动的，所以初始条件为 $v\big|_{t=0}=0$，代入上式，得 $C=-\dfrac{mg}{k}$，从而 $v(t)=\dfrac{mg}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}\right)$，又因为 $s\big|_{t=0}=0$，于是有

$$s(t)=\int_0^t v(t)\mathrm{d}t=\int_0^t \frac{mg}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}\right)\mathrm{d}t=\frac{mg}{k}\left[t+\frac{m}{k}\left(\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}-1\right)\right].$$

从而，潜艇在时刻 t 下降的距离 $s(t)$ 为

$$s(t)=\frac{mg}{k}\left[t+\frac{m}{k}\left(\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}-1\right)\right].$$

6.5　综合提高训练

例 6.5.1　设函数 $f(x)$ 在任意点 x 处的增量

$$\Delta y=\frac{x(1+2y)}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 $o(\Delta x)$ 是 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小，且 $y(0)=0$，求 $y(x)$.

解　由已知有

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{x(1+2y)}{1+x^2}+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]=\frac{x(1+2y)}{1+x^2},$$

从而 $y'=\dfrac{x(1+2y)}{1+x^2}$. 分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{1+2y}=\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，两边积分，得

$$\frac{1}{2}\ln|1+2y|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln|C|,$$

即 $1+2y=C(1+x^2)$. 再由 $y(0)=0$，得 $C=1$，故 $y=\dfrac{1}{2}x^2$.

例 6.5.2　设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，

$$f(x)F(x)=\frac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2}\ f(x),$$

已知 $F(0)=1$，$F(x)>0$，试求 $F(x)$.

解　由题意得，$F'(x)=f(x)$. 从而有

$$2F'(x)F(x)=\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}.$$

两边积分，有

$$\int 2F'(x)F(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x,$$

得

$$F^2(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C.$$

由 $F(0)=1$，得 $C=0$．再有 $F(x)>0$ 得 $F^2(x)=\dfrac{e^x}{1+x}+C$．

例 6.5.3　【2016（1）】设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$．

（1）证明反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛；

（2）若 $y(0)=1$，$y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的值．

解　（1）方程 $y''+2y'+ky=0$ 的特征方程为 $r^2+2r+k=0$．判别式 $\Delta=4-4k>0$，从而特征方程有两个不同的实根 r_1、r_2，且由求根公式 $r_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4k}}{2}$ 知两个根均小于零．从而微分方程的特解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty}y(x)dx=\int_0^{+\infty}(C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x})dx=\left.\left(\frac{C_1}{r_1}e^{r_1x}+\frac{C_2}{r_2}e^{r_2x}\right)\right|_0^{+\infty}=-\frac{C_1}{r_1}-\frac{C_2}{r_2},$$

从而反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛．

（2）由 $y(0)=1$，$y'(0)=1$，得 $C_1+C_2=1$，$C_1r_1+C_2r_2=1$．再由根与系数的关系得 $r_1+r_2=-2$，$r_1r_2=k$．从而求得

$$\int_0^{+\infty}y(x)dx=-\frac{C_1}{r_1}-\frac{C_2}{r_2}=-\frac{C_1r_1+C_2r_2}{r_1r_2}=\frac{3}{k}.$$

例 6.5.4　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且对于任意 $x\in(0,+\infty)$，$y\in(0,+\infty)$ 有

$$f(xy)=f(x)+f(y)+(x-1)(y-1).$$

又 $f'(1)=5$，$x\in(0,+\infty)$，求 $f(x)$ 的表达式．

解　在等式中令 $x=y=1$，则有 $f(1)=f(1)+f(1)$，可得 $f(1)=0$．当 $x\in(0,+\infty)$ 时，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)+f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)+(x-1)\left(1+\frac{\Delta x}{x}-1\right)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)+(x-1)\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}+1-\frac{1}{x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}f'(1)+1-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{5}{x}+1-\frac{1}{x}=\frac{4}{x}+1,$$

所以 $f(x)=4\ln|x|+x+C$．再由 $f(1)=0$，得 $f(x)=4\ln|x|+x-1$．

注　本题只有条件 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，从而等式两边不能直接求导数.

例 6.5.5　设 $f(x)$ 是以 2π 为周期且二阶可导的函数，它满足 $f(x)+f'(x+\pi)=\sin x$，求 $f(x)$.

解　由已知有 $f(x)=f(x+2\pi)$，从而原方程变为

$$f(x+2\pi)+f'(x+\pi)=\sin x .$$

设 $t=x+\pi$，则上式变为

$$f(t+\pi)+f'(t)=-\sin t ,$$

再求导

$$f'(t+\pi)+f''(t)=-\cos t ,$$

所以 $\sin t-f(t)+f''(t)=-\cos t$，即

$$f''(x)-f(x)=-\sin x-\cos x .$$

这是二阶非齐次线性方程，解得

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}(\sin x+\cos x) ,$$

再由 $f(x)$ 的周期性，可以得到 $C_1=C_2=0$.　故所求函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x) .$$

例 6.5.6　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x)+4\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3 ,$$

试求 $f(x)$ 的表达式.

解　令 $u=x-t$，则 $t=x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t&=-\int_x^0(x-u)f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u\\&=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

因此有

$$f(x)+4x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-4\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{3}x^3 .$$

由上式可以看出 $f(x)$ 可导，上式两边同时对 x 求导得

$$f'(x)+4\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+4xf(x)-4xf(x)=x^2 ,$$

整理得

$$f'(x)+4\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=x^2 .$$

上式两边同时再对 x 求导得 $f''(x)+4f(x)=2x$，即 $y''+4y=2x$.

对于二阶常系数齐次微分方程 $y''+4y=0$，特征方程为 $r^2+4=0$，解得 $r=\pm 2\mathrm{i}$. 因此 $y''+4y=0$ 的通解为

$$y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x).$$

设 $y^* = ax + b$ 为 $y'' + 4y = 2x$ 的一个特解，可以解得 $a = \dfrac{1}{2}$， $b = 0$，从而 $y^* = \dfrac{1}{2}x$. 故方程 $y'' + 4y = 2x$ 的通解为

$$y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{1}{2}x.$$

注意到初始条件 $f(0) = 0$， $f'(0) = 0$，解得 $C_1 = 0$， $C_2 = -\dfrac{1}{4}$. 因此

$$f(x) = -\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x.$$

例 6.5.7 【2000（2）】某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\dfrac{V}{3}$. 已知 1999 年年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标. 为了治理污染，从 2000 年年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$，问至少需要经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内？（注：设湖水中 A 的浓度是均匀的.）

解 设从 2000 年初（令此时 $t = 0$）开始，第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m，浓度为 $\dfrac{m}{V}$，则在时间间隔 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内，排入湖泊中 A 的量为

$$\frac{m_0}{V}\frac{V}{6}\mathrm{d}t = \frac{m_0}{6}\mathrm{d}t,$$

流入湖泊的水中 A 的量为

$$\frac{m}{V}\frac{V}{3}\mathrm{d}t = \frac{m}{3}\mathrm{d}t,$$

因此在时间间隔 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内湖泊中污染物 A 的改变量

$$\mathrm{d}m = \left(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3}\right)\mathrm{d}t,$$

分离变量，可得

$$\frac{\mathrm{d}m}{\dfrac{m_0}{6} - \dfrac{m}{3}} = \mathrm{d}t,$$

两边积分得

$$m = \frac{m_0}{2} - C\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}},$$

代入初始条件 $m\big|_{t=0} = 5m_0$，得 $C = -\dfrac{9}{2}m_0$. 从而

$$m = \frac{m_0}{2}(1 + 9\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}).$$

令 $m = m_0$，得 $t = 6\ln 3$，即至多需要经过 $6\ln 3$ 年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内.

第 7 章　空间解析几何与向量代数

7.1　知 识 要 点

7.1.1　向量的概念及线性运算

1．向量及其表示

（1）向量：既有大小又有方向的量称为向量，记为 $\boldsymbol{a}$．向量的大小称为向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$.

（2）向量的表示：向量在几何上可用有向线段来表示，以点 M 为起点，点 N 为终点的有向线段是一个向量，记为 $\overrightarrow{MN}$．数学上研究与起点无关的自由向量.

（3）向量的坐标与模长：在空间直角坐标系下，设点 M 的坐标为 (a_1,b_1,c_1)，点 N 的坐标为 (a_2,b_2,c_2)，则向量 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标为 $(a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1)$，该向量的模长为

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}\,.$$

（4）方向余弦：向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\,.$$

方向余弦满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$．

2．向量的运算

（1）加法与减法（满足平行四边形法则，如图 7.1 所示）：

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\,,\quad \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}\,.$$

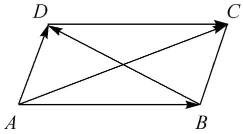


图 7.1

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$.

（2）向量的数乘：设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\lambda$ 为实数，则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.

（3）向量 a 与 b 的数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$，式中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$．

（4）向量 a 与 b 的向量积：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\,\boldsymbol{e}_c$，其中 θ 为向量 a 与 b 的夹角，$\boldsymbol{e}_c$ 为同时垂直于 a 与 b 的向量，向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{e}_c$ 成右手系；$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{pmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\right).$$

*（5）向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积：$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$．

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为边的平行六面体的体积.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}.$$

3．向量间的关系

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$ 均为非零向量.

（1）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $a_x=b_x$，$a_y=b_y$，$a_z=b_z$.

（2）$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$，式中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

（3）射影表示式为：当 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Pr}\,j_a\boldsymbol{b}$；当 $\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Pr}\,j_b\boldsymbol{a}$.

（4）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

（5）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

（6）向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

7.1.2　曲面及其方程

曲面的一般方程为

$$F(x,y,z)=0 \text{ 或 } z=f(x,y) \text{ 等.}$$

（1）球面：一般方程为 $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$，常化为标准方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为球心，R 为半径.

（2）旋转曲面：$\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面为 $F(y,\pm\sqrt{z^2+x^2})=0$，绕 z 轴旋转一周所得曲面为 $F(\pm\sqrt{y^2+z^2},z)=0$；类似可得其他坐标平面上的曲线绕同一坐标平面内的坐标轴旋转一周所得曲面的方程.

（3）柱面：方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 的柱面；方程 $F(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴，准线为 $\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的柱面；方程 $F(z,x)=0$ 表示母线平行于 y 轴，准线为 $\begin{cases} F(z,x)=0 \\ y=0 \end{cases}$ 的柱面.

（4）常见二次曲面的标准方程如下

椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$；　　椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；　　双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$；　　双叶抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$．

7.1.3　空间曲线及其方程

（1）两张曲面的交线为曲线．其一般方程为$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$.

（2）参数式方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}.$$

这里为 t 参数.

（3）空间曲线在坐标平面上的投影：

设 l：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，消去 z，得 $H(x,y)=0$，则曲线$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$为曲线 l 在 xOy 面上的投影．在其余面上的投影方法类似.

7.1.4　平面及其方程

平面与三元一次方程一一对应.

1．平面的点法式方程

过点 (x_0,y_0,z_0)，以非零向量 $\boldsymbol{r}=(A,B,C)$ 为法向量的平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2．平面的一般式方程

在点法式方程中，令 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，得到形如 $Ax+By+Cz+D=0$ 的方程.

3．平面的截距式方程

平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别为 a、b、c，当 $abc\neq 0$ 时，平面的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

4．平面的三点式方程

设 $P_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3)$ 为平面上不共线的三点，则有平面方程

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

5. 两个平面之间的关系

设平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 为平面的法向量；平面 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，其中 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ 为平面的法向量.

（1）平行：

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 // \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2\ (\lambda\neq 0) \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

（2）垂直：　$\pi_1\ \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

（3）相交：　$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ 不成立.

（4）重合：　$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

6. 两平面的夹角

设平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 为平面的法向量；平面 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，其中 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ 为平面的法向量. θ 为两平面的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

7. 点到平面的距离公式

点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

8. 两个平行平面之间的距离公式

设平面 $\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$，平面 $\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$，其中 $\boldsymbol{r}=(A,B,C)$ 为这两个平面的法向量. 则两个平面之间的距离为

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

7.1.5　直线及其表示

1. 直线的一般式方程

两张平面交于一条直线，得直线方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

2. 直线的点向式方程（标准式方程）

过点 $P(x_0,y_0,z_0)$，方向为 $\boldsymbol{\tau}=(m,n,p)$ 的直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

3．直线的参数式方程

点向式方程中，令 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，得

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

其中 t 为参数.

4．两条直线之间的关系

设直线 l_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$，其中 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 为直线的方向向量；直线 l_2：$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$，其中 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ 为直线的方向向量.

（1）平行：

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 // \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1=\lambda\boldsymbol{s}_2\ (\lambda\neq 0) \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

（2）垂直：$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow s_1\perp s_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

（3）两直线的夹角：记 θ 为两直线的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

5．点到直线的距离

直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}$，P 为 L 上一点，则点 Q 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{\tau}|}.$$

6．两条异面直线间的距离

M_1 为直线 L_1 上一点，M_2 为直线 L_2 上一点，L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{\tau}_1$ 与 $\boldsymbol{\tau}_2$，则直线 L_1 和 L_2 的公垂线长

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2)|}{|\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2|}.$$

7．直线与平面的关系

设平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$，其中 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量，直线 l：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，其中 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量.

（1）平行：$\pi // l \Leftrightarrow n\perp s \Leftrightarrow \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0 \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

（2）垂直：$\pi\perp l \Leftrightarrow n // s \Leftrightarrow \boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{s}\ (\lambda\neq 0) \Leftrightarrow n\times s=0 \Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

（3）直线在平面上：$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$，且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

8．平面束方程

过直线 l：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的平面束方程是

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

或者

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中 λ 和 μ 为参数.

注　第二个式子中不包含平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

7.2　典型例题分析

7.2.1　题型一、向量的运算

例 7.2.1　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，λ 为非零常数，若向量 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{b}$，则 λ 等于（　　）.

（A）$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$；　（B）$-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$；　（C）1；　（D）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解　所给向量为抽象向量，故用向量运算公式．如果 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{b}$，因此应有 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=0,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda\,|\boldsymbol{b}|^2=0,$$

由于 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，因而应有 $\lambda=-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$，故应选（B）.

例 7.2.2　设 $\boldsymbol{A}=2a+b$，$\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，问 k 为何值时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的面积为 6.

解　由题意

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(2-k)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

平行四边形面积为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的模．所以

$$6=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|2-k||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|2-k|\cdot 2,$$

解得 $k-2=\pm 3$，所以

$$k_1=5,\quad k_2=-1.$$

例 7.2.3　已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$________.

（A）2；　（B）$2\sqrt{2}$；　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　（D）1.

解　由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})=2$ 以及 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$ 得 $\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，从而 $(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{4}$，故 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2$.

选（A）.

7.2.2　题型二、空间曲线与曲面的求解问题

例 7.2.4　求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ y=z\end{cases}$ 在各坐标面上的投影方程.

解　在 xOy 平面上的投影：$\begin{cases}x^2+2y^2=4\\ z=0\end{cases}$.

在 xOz 平面上的投影：$\begin{cases}x^2+2z^2=4\\ y=0\end{cases}$.

在 yOz 平面上的投影：$\begin{cases}y=z\\ x=0\end{cases}$，当 $x=0$，$y=z$ 时，$2y^2\leqslant 4$，$|y|\leqslant\sqrt{2}$.

例 7.2.5　求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $y+z=1$ 交线在 xOy 平面上投影方程.

解　从曲线方程 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ y+z=1\end{cases}$ 中消去 z，得曲线向 xOy 平面得投影柱面方程 $x^2+y^2+y=1$.于是曲线在 xOy 平面得投影曲线的方程为 $\begin{cases}x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}\\ z=0\end{cases}$.

例 7.2.6　求由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成立体在 xOy 面上的投影.

解　由方程 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 消去 z 得到 $x^2+y^2=1$．这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面，这恰好是半球面与锥面的交线 C 关于 xOy 面的投影柱面，因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为：$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$．这是 xOy 面上的一个圆，于是所求立体在 xOy 面上的投影，就是该圆在 xOy 面上所围的部分：$x^2+y^2\leqslant 1$.

7.2.3　题型三、平面方程的求解问题

例 7.2.7　求在 x 轴上截距为 2，且过点 $(0,-1,0)$ 和点 $(2,1,3)$ 的平面方程.

解　设平面的截距方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，因为在 x 轴上截距为 2，且过点 $(0,-1,0)$，所以 $a=2$，$b=-1$，平面的截距方程为

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{c}=1,$$

将点 $(2,1,3)$ 代入得 $c=3$，所求平面方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$，即 $3x-6y+2z=6$.

例 7.2.8　已知一平面与向量 $\boldsymbol{a}=(-1,-1,-1)$ 平行，且在 x 轴、y 轴上的截距依次为 3 和–2，求其方程.

解　可设平面的截距式方程为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{c}=1$，则此平面的法线向量 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{c}\right)$ 与所给向量垂直，即点积为零

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{c}=0,$$

求得 $c=6$，所求方程为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1$.

例 7.2.9　平面过原点且垂直于平面 $x+2y+3z=1$ 与 $6x-y+5z=1$，求该平面方程.

解　平面 $x+2y+3z=1$ 的法线向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,2,3)$，平面 $6x-y+5z=1$ 的法线向量 $\boldsymbol{n}_2=(6,-1,5)$，所求平面法线向量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 6 & -1 & 5\end{vmatrix}=(13,13,-13),$$

所求平面方程为 $13(x-0)+13(y-0)-13(z-0)=0$，即 $x+y-z=0$.

例 7.2.10　求平面 $x-y+2z-6=0$ 与平面 $2x+y+z-5=0$ 的夹角，并判别坐标原点到哪个平面距离更近.

解　设 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$ 为两平面 π_1 与 π_2 的法向量，则 π_1 与 π_2 夹角余弦为

$$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

故两平面夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$.原点到 π_1 与 π_2 距离分别为

$$d_1=\frac{|0-0+2\times0-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\sqrt{6},\quad d_2=\frac{|2\times0+0+0-5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{6}},$$

由于 $d_1>d_2$，故平面 $2x+y+z-5=0$ 与原点距离更近.

7.2.4　题型四、直线方程的相关问题

例 7.2.11　将直线 $\begin{cases}x-y+z-1=0\\ 2x+y+z-4=0\end{cases}$ 化为标准方程和参数方程.

解　将 z 消去，得到 $x=-2y+3$，再代入方程组里的第一个式子就得到 $z=3y-2$，把 y 反解出来得到 $\frac{x-3}{-2}=y=\frac{z+2}{3}$ 就是标准式，由标准式可以直接写出参数式

$$\begin{cases} x=-2t+3 \\ y=t \\ z=3t-2 \end{cases}.$$

例 7.2.12　求经过点 $(5,2,3)$ 且平行于直线 $\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ x+2y-4z=1 \end{cases}$ 的直线方程.

解　所给直线的方程是交面式，即此直线为方程组中两个方程表示的平面的交线．即该直线与上述两平面的法线向量都垂直，其方向向量可取两法线向量的向量积：

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}=(10,3,5),$$

所以所求直线的点向式方程为 $\dfrac{x-5}{10}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{5}$.

例 7.2.13　求过点 $P(2,1,3)$ 且与直线 $l:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解法 1　作平面 π 经过 P 点，且与直线 l 垂直，平面 π 的方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0 \text{ 或 } 3x+2y-z-5=0,$$

再求平面 π 与 l 的交点，从联立方程中求出交点，或将直线化成参数式：

$$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases},$$

代入平面 π 的方程中得到

$$3(-1+3t-2)+2(1+2t-1)-(-t-3)=0,$$

解得 $t=\dfrac{3}{7}$，从而得到交点 $Q\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$，由两点式可得到过点 P 和 Q 的直线方程：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-12}=\dfrac{z-3}{4}$.

解法 2　先将直线化成一般式：$\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ x+3z+1=0 \end{cases}$，并写出过该直线的平面束方程

$$(2x-3y+5)+\lambda(x+3z+1)=0 \text{ 或 } (2+\lambda)x-3y+3\lambda z+5+\lambda=0,$$

将点 $P(2,1,3)$ 代入上述方程，解得 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$，则经过 P 点与 l 的平面方程为

$$x-2y-z+3=0,$$

过 P 垂直于直线 l 的平面方程为

$$3x+2y-z-5=0,$$

从而所求直线就是所得两平面的交线

$$\begin{cases} x-2y-z+3=0 \\ 3x+2y-z-5=0 \end{cases}.$$

例 7.2.14　【1998（1）】求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程，并求 L_0 绕 y 轴一周所成曲面的方程.

解法 1　先求出直线与平面的交点．将直线 L 化为参数式

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases},$$

代入到平面方程 $x-y+2z-1=0$ 中，得

$$(1+t)-t+2(1-t)-1=0,$$

解得 $t=1$．从而交点为 $Q(2,1,0)$；再过直线 L 上点 $P(1,0,1)$ 做平面的垂线

$$L':\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2},$$

即 $\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=1+2t \end{cases}$，并求 L' 与平面的交点 M：

$$(1+t)-(-t)+2(1+2t)-1=0,$$

解得 $t=-\dfrac{1}{3}$，从而交点为 $M\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$．$M\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ 和 $Q(2,1,0)$ 的连线就是所求直线 L_0

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}.$$

解法 2　直线 L 过点 $(1,0,1)$，过 L 作垂直于 π 的平面 π^*，π^* 的法向量

$$\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

故 π^* 的方程为

$$-(x-1)+3(y-0)+2(z-1)=0,$$

即 $x-3y-2z+1=0$．所以所求投影直线 L_0 的方程为

$$\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}.$$

求 L_0 绕 y 轴一周所成曲面的方程：先把 L_0 表示为以 y 为参数的形式

$$\begin{cases} x=2y \\ z=-\dfrac{1}{2}(y-1) \end{cases},$$

按参数式表示的曲面的参数方程为：$\begin{cases} x=\sqrt{(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2}\cos\theta \\ y=y \\ z=\sqrt{(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2}\sin\theta \end{cases}$，消去$\theta$得所求的曲面方程为

$$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2,$$

即

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

例 7.2.15　求直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=-z-3$与平面$3x-2y+z-8=0$的夹角及交点.

解　直线的方向向量与平面夹角的正弦：

$$\sin\varphi=\frac{|9-4-1|}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{7},$$

所以夹角为$\arcsin\frac{2}{7}$；求交点就是求直线方程与平面方程的公共解．把直线方程化为参数方程

$$\begin{cases} x=3t+1 \\ y=2t+2, \\ z=-t-3 \end{cases}$$

代入平面方程

$$3(3t+1)-2(2t+2)+(-t-3)-8=0,$$

解出$t=3$，对应的$\begin{cases} x=10 \\ y=8 \\ z=-6 \end{cases}$就是交点的坐标，交点就是$A(10,8,-6)$.

例 7.2.16　求点$(0,-1,1)$到直线$L:\begin{cases} y+2=0 \\ x+2z-7=0 \end{cases}$的距离.

解　过点作直线的垂面，并求出与直线的交点，就可以把点到直线的距离转化成为两点间距离的运算．直线的方向向量 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(2,0,-1)$就是垂面的法线向量，所以垂面的方程为$2x-(z-1)=0$，垂面与直线的交点可将直线的方程组与垂面的方程联立，解得交点为$(1,-2,3)$，求得距离为

$$\sqrt{(1-0)^2+(-2+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}.$$

例 7.2.17　设L_1、L_2为两条共面直线，L_1的方程为$\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$，$L_2$通过点$(2,-3,-1)$且与$x$轴正向夹角为$\frac{\pi}{3}$，与$z$轴正向夹锐角，求$L_2$的方程.

解　因为 L_2 与 x 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{3}$，与 z 轴正向夹锐角，所以可以假定 L_2 的方向向量为 $(m,n,1)$，其中 $m>0$．x 轴的单位向量为 $(1,0,0)$．由夹角公式可得

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{m}{1\cdot\sqrt{m^2+n^2+1}}, \qquad (*)$$

L_1 上的点(7, 3, 5)、L_2 上的点(2, −3, −1)构成向量(5, 6, 6)与 L_1 的方向向量(1, 2, 2)及 L_2 的方向向量 $(m,n,1)$ 共面．所以混合积为 0，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 6 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}=0,$$

得到 $4n-4=0$，从而 $n=1$．代入式（*），得到 $m=\frac{2}{\sqrt{6}}$．于是 L_2 的方程为

$$\frac{x-2}{\frac{2}{\sqrt{6}}}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+1}{1},$$

即 $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{\sqrt{6}}=\frac{z+1}{\sqrt{6}}$.

7.2.5　题型五、直线与平面的关系问题

例 7.2.18　已知直线 $l:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$，若平面 π 过点 $M(2,1,-5)$ 且与 l 垂直，求平面 π 的方程.

解　由题意可知，直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(3,2,-1)$ 必定平行于所求平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$，因此可取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=(3,2,-1).$$

利用平面的点法式方程可知

$$3(x-2)+2(y-1)-[z-(-5)]=0,$$

即

$$3x+2y-z-13=0.$$

例 7.2.19　求通过 $M_0(1,-1,2)$ 和直线 $l:\begin{cases} x-y-z+1=0 \\ 2x+y+z-5=0 \end{cases}$ 的平面方程.

解　通过 l 的所有平面的方程为

$$K_1(x-y-z+1)+K_2(2x+y+z-5)=0,$$

其中 K_1、K_2 为任意实数，且不同时为 0．将 $M_0(1,-1,2)$ 代如上述方程得

$$K_1-2K_2=0,\quad K_1=2K_2.$$

由于方程允许乘或除一个不为 0 的常数，故取 $K_2=1$，得 $K_1=2$，代入方程得

$$2(x-y-z+1)+(2x+y+z-5)=0,$$

即 $4x-y-z-3=0$.

例 7.2.20　在平面 $x+y+z+1=0$ 内，求一直线，使它通过直线 $\begin{cases} y+z+1=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$ 与平面的交点，且与已知直线垂直.

解　直线与平面的交点满足 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ y+z+1=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$，解得交点为 $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$. 将已知直线转化为：$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=z$. 所以该直线的方向向量为：(–2,–1, 1). 所求直线垂直于平面的法向量(1, 1, 1)，垂直于已知直线的方向向量(–2,–1, 1). 所以所求直线的方向向量为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

于是所求直线为

$$\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}.$$

例 7.2.21　求直线 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影方程.

解　由平面束方程知，直线 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$ 的投影柱面方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(y-x-z-1)=0,$$

即

$$(1-\lambda)x+(1+\lambda)y-(1+\lambda)z-(1+\lambda)=0.$$

上述平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直，所以

$$(1-\lambda)\cdot 1+(1+\lambda)\cdot 1-(1+\lambda)\cdot 1=0,$$

得到 $\lambda=1$. 于是投影平面为 $2y-2z-2=0$，即 $y-z-1=0$. 所求投影直线为

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$

7.3　深 化 训 练

7.3.1　填空题

（1）设 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$________.

（2）设一平面经过原点与点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程是________.

（3）两平面 $x-2y+2z-5=0$，$x-2y+2z+4=0$ 之间的距离是________.

（4）点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离是________.

（5）过两点 $(3,-2,1)$ 与 $(-1,0,2)$ 的直线的对称式方程是________，参数方程是________.

（6）过点 $(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=1+t \end{cases}$ 垂直的平面方程是________.

（7）直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-3}{6}$ 在平面 $2x+y-2z+5=0$ 上的投影直线方程是________.

（8）点 $(1,-4,5)$ 到直线 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 上的投影点的坐标是________.

（9）与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$，$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程是________.

（10）已知两条直线的方程是 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，$L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是________.

7.3.2　单项选择题

（1）设 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，若以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积为 6，则 λ 的值为（　　）.

（A）-1 和 5；　（B）-1 和 -1；　（C）1 和 -5；　（D）1 和 5.

（2）母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程为（　　）.

（A）$3x^2+2y^2=16$；　（B）$3y^2-z^2=16$；

（C）$x^2+2y^2=16$；　（D）$3y^2-z=16$.

（3）过点 $(1,-2,4)$ 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线方程是（　　）.

（A）$2x-3y+z-12=0$；　（B）$x-2y+4z-4=0$；

（C）$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-4}{1}$；　（D）$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{4}$.

（4）直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ 与平面 $2x+y-z=-2=0$ 的位置关系是（　　）.

（A）平行；　（B）垂直；　（C）夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$；　（D）夹角为 $-\dfrac{\pi}{4}$.

（5）设直线 $L:\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $4x-2y+z-2=0$，则直线 L（　　）.

（A）平行于平面但是不在平面上；　（B）在平面上；

（C）垂直于平面；　（D）与平面斜交.

（6）【1993（1）】设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$，$L_2:\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$，则 L_1、L_2 的夹角为（　　）.

（A）$\dfrac{\pi}{6}$；　（B）$\dfrac{\pi}{4}$；　（C）$\dfrac{\pi}{3}$；　（D）$\dfrac{\pi}{2}$.

7.3.3 设 $\boldsymbol{a}=(0,1,-1)$， $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$，求与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均垂直且模等于3的向量 $\boldsymbol{c}$.

7.3.4 求与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$ 共线且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=18$ 的向量 $\boldsymbol{b}$.

7.3.5 已知 $|\boldsymbol{a}|=2,\ |\boldsymbol{b}|=5,\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{2}{3}\pi$，问：系数 λ 为何值时，向量 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直.

7.3.6 若 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$，式中 $|\boldsymbol{m}|=2$，$|\boldsymbol{n}|=1$，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=\dfrac{\pi}{2}$，化简表达式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+1$.

7.3.7 求平行四边形面积，若已知对角线为向量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$，$|\boldsymbol{m}|=1,\ |\boldsymbol{n}|=2$，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=\dfrac{\pi}{6}$.

7.3.8 求过三点 $A(1,1,-1)$、$B(-2,-2,0)$ 和 $C(1,0,2)$ 的平面方程.

7.3.9 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$，$M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z-4=0$，求它的方程.

7.3.10 求通过点 $P(2,-1,-1)$、$Q(1,2,3)$ 且垂直于平面 $2x+3y-5z+6=0$ 的平面方程.

7.3.11 求垂直于两平面 $x-y-z+3=0$、$2x+y-z-2=0$ 且通过点 $(1,-1,1)$ 的平面方程.

7.3.12 已知一平面与向量 $\boldsymbol{a}=(-1,-1,-1)$ 平行，且在 x 轴、y 轴上的截距依次为 3 和–2，求其方程.

7.3.13 求与平面 π_1： $2x-2y+z+6=0$ 平行，且与它相距 3 个单位长度的平面方程.

7.3.14 设两个平面均通过点 $A=(5,16,12)$，其中一个平面通过 x 轴，另一个平面通过 y 轴，求这两个平面的夹角.

7.3.15 求过点 $(2,6,8)$ 且与直线 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-6}{2}$ 垂直相交的直线方程.

7.3.16 求以 $A(1,0,-1)$、$B(1,-2,0)$、$C(-1,2,-1)$ 为顶点的三角形的面积.

7.3.17 求通过三平面 $2x+y-z=0$， $x-3y+z+1=0$ 和 $x+y+z-3=0$ 的交点，且平行于平面 $x+y+2z=0$ 的平面方程.

7.3.18 求过 z 轴且与平面 $2x+y-4z=2$ 垂直的平面方程.

7.3.19 求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $x-3y=2$ 平行的直线方程.

7.3.20 求过点 $(2,6,8)$ 且与直线 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-6}{2}$ 垂直相交的直线方程.

7.3.21 过平面 $x+28y-2z+17=0$ 和平面 $5x+8y-z+1=0$ 的交线，作球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的切平面，求切平面方程.

7.3.22 已知直线 $\begin{cases}3x-y+2z-6=0\\x+4y-z+d=0\end{cases}$ 与 z 轴相交，求 d 值.

7.3.23 在平面 $x+y+z+1=0$ 内，求一直线，使它通过直线 $\begin{cases}y+z+1=0\\x+2z=0\end{cases}$ 与平面的交点，且与已知直线垂直.

7.3.24 决定 λ 使直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 相交.

7.3.25　求直线 $L:\begin{cases}x=1-2t\\ y=3+t\\ z=2-3t\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影.

7.3.26　求准线为 $\begin{cases}x^2+y^2+4z^2=1\\ x^2=y^2+z^2\end{cases}$ 母线平行于 z 轴的柱面方程.

7.3.27　求直线 $\begin{cases}x+y-z=1\\ -x+y-z=1\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影方程.

7.4　深化训练详解

7.3.1 填空题

（1）70.　　（2）$2x+2y-3z=0$.　　（3）3.　　（4）$\sqrt{2}$.

（5）$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$，$\begin{cases}x=-1+4t\\ y=-2t\\ z=2-t\end{cases}$.　　（6）$x-3y-z+4=0$.

（7）$\begin{cases}3x-4y+z+1=0\\ 2x+y-2z-5=0\end{cases}$.　　（8）$(0,-1,0)$.

（9）$x-y+z=0$.　　（10）$x-3y+z+2=0$.

7.3.2　选择题

（1）（A）　（2）（B）　（3）（C）　（4）（A）　（5）（C）　（6）（C）.

7.3.3　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-1,-1,-1)=\boldsymbol{r}$，设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{r}$，因为 $|\boldsymbol{c}|=3$，即 $|\boldsymbol{c}|=|\lambda||\boldsymbol{r}|=\sqrt{3}|\lambda|=3$，所以 $\lambda=\pm\sqrt{3}$.

7.3.4　因为向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线，设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=(2\lambda,-\lambda,2\lambda)$，因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=18=4\lambda+\lambda+4\lambda=9\lambda$，所以 $\lambda=2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}=(4,-2,4)$.

7.3.5　$0=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$$=3\lambda|\boldsymbol{a}|^2-\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{2}{3}\pi+5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{2}{3}\pi-17|\boldsymbol{b}|^2=17\lambda-680.$$

所以 $\lambda=\dfrac{680}{17}=40$.

7.3.6　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+1$

$$=(4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\cdot(2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n})+3(4\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})-2(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})\cdot(2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n})+1$$

$$=16|\boldsymbol{m}|^2+9|\boldsymbol{n}|^2+1=16\times4+9\times1+1=74.$$

7.3.7　假设平行四边形的二边为向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，不妨假设 $\begin{cases}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{B}=-3\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}\end{cases}$，从而

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\times(-\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n})=5\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n},$$

$$\text{平行四边形面积}=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=5|\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}|=5|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|\sin(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=5\cdot1\cdot2\cdot\sin\frac{\pi}{6}=5.$$

7.3.8　$\overrightarrow{AB}=(-3,-3,1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-1,3)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-3&-3&1\\0&-1&3\end{vmatrix}=(-8,9,3)$.

故所求平面方程为 $-8(x-1)+9(y-1)+3(z+1)=0$.

7.3.9　由已知条件知，向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$ 与平面 $x+y+z-4=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 的向量积 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{n}$ 即为所求平面的法向量

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&0&-2\\1&1&1\end{vmatrix}=(2,-1,-1),$$

因此 $2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$ 为所求平面.

7.3.10　设所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{n}$ 与已知平面的法线向量 $\boldsymbol{n}_1$ 垂直；另外，由两个已知点可得所求平面上的一个向量 $\overrightarrow{PQ}=(-1,3,4)$，则 $\boldsymbol{n}$ 与此向量也必定垂直，所以可取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&3&-5\\-1&3&4\end{vmatrix}=(27,-3,9),$$

再取 P 作为已知点，即写出所求平面的点法式方程 $9(x-2)-(y+1)+3(z+1)=0$.

7.3.11　设所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{n}$ 与所给两平面的法线向量都垂直，因此可以取 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&-1\\2&1&-1\end{vmatrix}=(2,-1,3)$，所求平面方程为 $2(x-1)-(y+1)+3(z-1)=0$.

7.3.12　可设平面的截距式方程为 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{c}=1$，则此平面的法线向量 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{c}\right)$ 与所给向量垂直，即点积为零

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{c}=0,$$

求得 $c=6$，所求方程为 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{6}=1$.

7.3.13　因为所求平面与已知平面平行，所以设此平面方程为 $2x-2y+z+D=0$；两平面的距离为 3，取已知平面上一点 $(0,3,0)$，则其到所求平面的距离为

$$d=\frac{|-6+D|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|D-6|}{3}=3,$$

求得 $D=15$ 或 $D=-3$，对应的方程分别为 π_1：$2x-2y+z+15=0$ 和 π_2：$2x-2y+z-3=0$.

7.3.14　设平面 $\pi_1:B_1y+C_1z=0$，$\pi_2:A_2x+C_2z=0$，代入已知点求得各个系数，进而写出方程：$\pi_1:3y-4z=0$，$\pi_2:12x-5z=0$，两平面的夹角即两平面各自法线向量的夹角满足

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})=\frac{(0,3,-4)\cdot(12,0,-5)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{4}{13},$$

所以夹角为 $\arccos\frac{4}{13}$.

7.3.15　与已知直线垂直的平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$，又已知过 $(2,6,8)$ 点，所以平面的方程为 $(x-2)+2(y-6)+2(z-8)=0$，它与直线 $\begin{cases}x=t+3\\y=2t+4\\z=2t+6\end{cases}$ 交于点 $\left(\frac{34}{9},\frac{50}{9},\frac{68}{9}\right)$，所以所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{-4}=y-6=z-8.$$

7.3.16　由于

$$\overrightarrow{AB}=(1-1,-2-0,0-(-1))=(0,-2,1),$$
$$\overrightarrow{AC}=(-1-1,2-0,-1-(-1))=(-2,2,0),$$

因此

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&-2&1\\-2&2&0\end{matrix}\right\|=\sqrt{6}.$$

7.3.17　所求平面平行于 $x+y+2z=0$，所以该平面的法向量为 $(1,1,2)$．三平面的交点为 $\begin{cases}2x+y-z-2=0\\x-3y+z+1=0\\x+y+z-3=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$．所以所求平面为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0,$$

即 $x+y+2z-4=0$.

7.3.18　因为所求平面过 z 轴，所以设平面方程为 $Ax+By=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,0)$，平面 $2x+y-4z=2$ 的法线向量 $\boldsymbol{n}_1=(2,1,-4)$，因为 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$，所以 $2A+B=0$，$B=-2A$，所以所求平面方程为　$x-2y=0$.

7.3.19　平面 $x+2z=1$ 的法线向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,2)$，平面 $x-3y=2$ 的法线向量 $\boldsymbol{n}_2=(1,-3,0)$，所求直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&2\\1&-3&0\end{vmatrix}=(6,2,-3),$$

所求直线方程为 $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{-3}$.

7.3.20　先过点 $M_0\,(2,6,8)$ 作一平面 π 垂直于已知直线，平面 π 方程为 $(x-2)+2(y-6)+2(z-8)=0$，即 $x+2y+2z=30$，再求平面 π 与直线 L 的交点，将直线的参数方程

$L:\begin{cases} x=3+t \\ y=4+2t \\ z=6+2t \end{cases}$，代入平面方程得

$$(3+t)+2(4+2t)+2(6+2t)=30,$$

解得 $t=\dfrac{7}{9}$，所以交点 M 坐标为 $\left(\dfrac{34}{9},\dfrac{50}{9},\dfrac{68}{9}\right)$，向量 $\overrightarrow{M_0M}=\left(\dfrac{16}{9},\dfrac{-4}{9},\dfrac{-4}{9}\right)$ 为所求直线的方向向量，所求直线为 $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z-8}{-1}$.

7.3.21　过平面 $x+28y-2z+17=0$ 和平面 $5x+8y-z+1=0$ 的交线的平面方程为

$$x+28y-2z+17+\lambda(5x+8y-z+1)=0,$$

即

$$(1+5\lambda)x+(28+8\lambda)y-(2+\lambda)z+17+\lambda=0.$$

假设平面和球面的切点为 (x_0,y_0,z_0)，于是在该点的法向量为 (x_0,y_0,z_0)．所以得到：

$$\begin{cases} (1+5\lambda)x_0+(28+8\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0+17+\lambda=0 \\ \dfrac{1+5\lambda}{x_0}=\dfrac{28+8\lambda}{y_0}=\dfrac{-(2+\lambda)}{z_0}=t \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=1 \end{cases},$$

由第二式解出 x_0,y_0,z_0 和 t,λ 的关系，代入第一式，并注意到第三式，于是得到

$$t+17+\lambda=0,$$

再次代入第一式，得到

$$(1+5\lambda)^2+(28+8\lambda)^2+(2+\lambda)^2=(17+\lambda)^2,$$

整理得 $89\lambda^2+428\lambda+500=0$，解得

$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-\frac{250}{89}.$$

当 $\lambda_1=-2$，得到所求平面为 $3x-4y-5=0$；当 $\lambda_2=-\dfrac{250}{89}$，得到所求平面为 $387x-164y-24z-421=0$.

7.3.22　假设直线与 z 轴交点为 $(0,0,z_0)$，则该点满足 $3x-y+2z-6=0$．于是

$$2z_0-6=0,\quad z_0=3.$$

将 $(0,0,3)$ 代入 $x+4y-z+d=0$，得到 $d=3$.

7.3.23　直线与平面的交点满足 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ y+z+1=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$，解得交点为 $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$.

将已知直线转化为：$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=z$．所以该直线的方向向量为$(-2,\ -1,\ 1)$．所求直线垂直于平面的法向量$(1, 1, 1)$，垂直于已知直线的方向向量$(-2,-1,\ 1)$．所以所求直线的方向向量为：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

于是所求直线为 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-1}$.

7.3.24　由 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}=t$ 得到 $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=1+\lambda t \end{cases}$. 代入另一直线方程，得到:

$$2+t=-2+2t=1+\lambda t，\quad t=4，\quad \lambda=\frac{5}{4}$$

7.3.25　在三个坐标面上的投影分别为

（1）在 xOy 平面上：$\begin{cases} x=1-2t \\ y=3+t \\ z=0 \end{cases}$；

（2）在 xOz 平面 $\begin{cases} x=1-2t \\ y=0 \\ z=2-3t \end{cases}$；

（3）在 yOz 平面上 $\begin{cases} x=0 \\ y=3+t \\ z=2-3t \end{cases}$.

7.3.26　因为母线平行于 z 轴，只要在方程中消去 z，得到 $5x^2-3y^2=1$ 为所求.

7.3.27　由平面束方程知，直线 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$ 的投影柱面方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(y-x-z-1)=0，$$

即

$$(1-\lambda)x+(1+\lambda)y-(1+\lambda)z-(1+\lambda)=0.$$

上述平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直，所以

$$(1-\lambda)\cdot 1+(1+\lambda)\cdot 1-(1+\lambda)\cdot 1=0，$$

得到 $\lambda=1$. 于是投影平面为 $2y-2z-2=0$，即 $y-z-1=0$，所求投影直线为

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$

7.5　综合提高训练

例 7.5.1　求直线 $\begin{cases} x=3z-1 \\ y=2z-3 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} y=2x-5 \\ z=7x+2 \end{cases}$ 之间的垂直距离.

解　两直线可转化成 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=z=t$ 及 $x=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-2}{7}=s$，于是得到参数方程

$$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=-3+2t, \\ z=t \end{cases}\qquad \begin{cases} x=s \\ y=-5+2s, \\ z=2+7s \end{cases}$$

两直线上的点之间的距离平方为

$$\begin{aligned} d^2 &= (-1+3t-s)^2+(-3+2t+5-2s)^2+(t-2-7s) \\ &= (-1+3t-s)^2+(2+2t-2s)^2+(t-2-7s)^2, \end{aligned}$$

当 t、s 使 d 达到最小值时，d 即为垂直距离．所以

$$\begin{cases} \dfrac{\partial d^2}{\partial t}=6(-1+3t-s)+4(2+2t-2s)+2(t-2-7s)=0 \\ \dfrac{\partial d^2}{\partial s}=-2(-1+3t-s)-4(2+2t-2s)-14(t-2-7s)=0 \end{cases},$$

得方程组

$$\begin{cases} 28t-28s-2=0 \\ -28t+108s+22=0 \end{cases},$$

解得 $s=-\dfrac{1}{4}$，$t=-\dfrac{5}{28}$．将 t、s 的值代入 d 的表达式，算得 d 的值为

$$d^2=\left(-1-\frac{15}{18}+\frac{1}{4}\right)^2+\left(2-\frac{10}{28}+\frac{2}{4}\right)^2+\left(-\frac{5}{28}-2+\frac{7}{4}\right)^2=\frac{5040}{28^2},$$

从而 $d=\dfrac{3\sqrt{35}}{7}$．

例 7.5.2　【2013（1）】设直线 L 过 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的立体为 Ω．求曲面 Σ 的方程．

解　直线 L 的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$，参数方程为

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases}\quad（t\text{ 为参数}）.$$

设 (x,y,z) 为曲面 Σ 上的任一点，则

$$\begin{cases} x^2+y^2=(1+t)^2+t^2 \\ z=-t \end{cases},$$

消去参数 t，得曲面 Σ 的方程为

$$x^2+y^2=2z^2-2z+1.$$

例 7.5.3　求过直线$\begin{cases} x+y-2z+3=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$且切于球面$x^2+y^2+z^2=1$的平面.

解　过所给直线除平面$2x-y+z=0$外的其他所有平面方程为

$$(x+y-2z+3)+\lambda(2x-y+z)=0,$$

即

$$(1+2\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-2)z+3=0, \qquad (*)$$

因为球面与平面相切，因此球心到平面距离应等于半径，于是

$$\frac{|0+0+0+3|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(1-\lambda)^2+(\lambda-2)^2}}=1,$$

得$6\lambda^2-2\lambda+3=0$，所以$\lambda=\dfrac{1\pm\sqrt{19}}{6}$．代入式（*）得两个所求的平面

$$(x+y-2z+3)+\frac{1\pm\sqrt{19}}{6}(2x-y+z)=0.$$

第 8 章　多元函数微分法及应用

8.1　知 识 要 点

8.1.1　二元函数的定义

设 D 是平面上的一个点集，如果对于每一个点 $P(x,y)\in D$ ，按照一定的对应法则 f ，总有唯一确定的 z 与之对应，则称 z 是变量 x、y 的二元函数(或点 P 的函数)，记作 $z=f(x,y)$，点集 D 称为函数的定义域，也记作 $D(f)$ 或 D_f ， x 与 y 称为自变量， z 称为因变量，数集 $\{z\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D_f\}$ 称为函数的值域，记作 $Z(f)$ 或 Z_f . 通常二元函数的图形是空间中的一个曲面.

8.1.2　二元函数的极限与连续

1．二元函数的极限

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个去心邻域内有定义， A 为某个确定的常数，如果对于 $\forall\varepsilon>0$ ，$\exists\delta>0$ ，使得对于满足不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)$ ，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 $P\to P_0$ 时函数 $z=f(x,y)$ 的极限为 A ，记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A\text{，或}\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A\text{，或}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A .$$

注　二元函数的极限与一元函数的极限有着本质的区别，对于一元函数而言， $x\to x_0$ 无非只有两种情况，即 $x\to x_0^+$ ， $x\to x_0^-$ ，但对于二元函数而言，点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 却有着无穷多种情形（或路径）.

2．二元函数的连续

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个实心邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ ，则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D ， $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，那么称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

与闭区间上一元连续函数的性质类似，有界闭区域上的多元连续函数具有如下性质.

性质 1（有界性与最大值最小值定理）　在有界闭区域 D 上的多元连续函数，必定在 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值.

性质 2（介质定理）　在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

性质 3（一致连续性定理） 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必定在 D 上一致连续.

8.1.3 偏导数

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的偏导数为

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

对 x 的偏导数也可记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\quad z'_x(x_0,y_0),\quad f_x(x_0,y_0).$$

同样，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 y 的偏导数为

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

对 y 的偏导数也可记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},\quad z'_y(x_0,y_0),\quad f_y(x_0,y_0).$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数还是 x 、 y 的二元函数，称其为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z'_x(x,y),\quad f'_x(x,y),\quad f_x(x,y).$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z'_y(x,y),\quad f'_y(x,y),\quad f_y(x,y).$$

注 多元函数求偏导问题本质上仍是一元函数的求导问题，因此一元函数的求导公式、法则和技巧均可直接使用．求偏导时，关键是要分清对哪个变量求导，把其他剩余变量暂时当作常数.

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$ ，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$ ，于是在 D 内 $f_x(x,y)$ 、$f_y(x,y)$ ，都是 x 、 y 的函数．如果这两个函数的偏导数也存在，那么称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数．按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中第二、三个偏导数称为**混合偏导数**．同样可得三阶、四阶……以及 n 阶偏导数．二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

注　若二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 都连续，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，即二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关．该结论可以推广到高阶偏导数的情形，即高阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关．

8.1.4　全微分

1．全微分的概念

设自变量在点 (x,y) 处有改变量 Δx 、 Δy ，若函数 $z=f(x,y)$ 相应的改变量可以表示为

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\,,\quad \rho\to 0\,,$$

其中 A 、 B 可以是 x 、 y 的函数，但与 Δx 、 Δy 无关； $o(\rho)$ 是一个比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 较高阶的无穷小量，则称 $A\Delta x+B\Delta y$ 是函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的**全微分**，记作 $\mathrm{d}z$ 或 $\mathrm{d}f(x,y)$ ，即

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y\,,$$

此时也称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处**可微**．

2．可微的充分条件与必要条件

定理 1（必要条件）　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续．

定理 2（必要条件）　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处两个偏导数 $f_x'(x,y)$ 、 $f_y'(x,y)$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\,.$$

定理 3（充分条件）　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 某一邻域内有连续的偏导数 $f_x'(x,y)$ 、 $f_y'(x,y)$ ，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微．

3．全微分的形式不变性

设 $z=f(u,v)$ 可微，若 u、v 为自变量，则 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$．若 u、v 为中间变量，例如，$u=u(x,y)$ ，$v=v(x,y)$ ，如果 $u(x,y)$ 、 $v(x,y)$ 分别都有连续的偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在 (x,y) 处的全微分仍然可以表示成 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$．即无论 u 、 v 是自变量还是中间变量， $\mathrm{d}z$ 总可以表示为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$．

4．极限、连续、偏导数及微分之间的关系

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某个邻域内有定义，则函数的极限、连续、偏导数及微分之间的关系如图 8.1 所示．

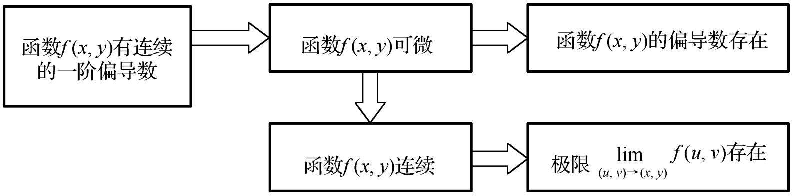


图 8.1　函数 $f(x,y)$ 连续、可微及其偏导数之间的关系

需要注意的是上述关系逆推不一定成立.

8.1.5　多元函数的求导法则

1．复合函数求导法则

（1）如果函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 有连续的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续的偏导数，那么复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处对 x、y 的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}f_1'+\frac{\partial v}{\partial x}f_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}f_1'+\frac{\partial v}{\partial y}f_2'.$$

（2）如果三元复合函数为 $s=f(u,v,w)$ 有连续的偏导数，而 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，$w=w(x,y)$ 也有连续的偏导数，则 $z=f[u(x,y),v(x,y),w(x,y)]$ 在点 (x,y) 处对 x、y 的偏导数存在，且

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}f_1'+\frac{\partial v}{\partial x}f_2'+\frac{\partial w}{\partial x}f_3',$$

$$\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}f_1'+\frac{\partial v}{\partial y}f_2'+\frac{\partial w}{\partial y}f_3'.$$

（3）如果 $z=f(u,v)$ 有连续的偏导数，函数 $u=\phi(x)$ 和 $v=\psi(x)$ 可导，则函数 $z=f[\phi(x),\psi(x)]$ 对 x 的导数称为**全导数**，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}f_1'+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}f_2'.$$

2．隐函数求导法则

（1）如果二元函数 $F(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 确定一个具有连续导数的隐函数 $y=f(x)$，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

（2）如果三元函数 $F(x,y,z)$ 具有连续偏导数，且 $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$，方程 $F(x,y,z)=0$ 确定一个具有

连续偏导数的二元隐函数 $z=f(x,y)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

8.1.6　二元函数的极值

1．极值存在的必要条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极值，且两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$， $f_y'(x_0,y_0)$ 都存在，则 $f_x'(x_0,y_0)=0$， $f_y'(x_0,y_0)=0$．

2．极值存在的充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有连续的二阶偏导数，且点 (x_0,y_0) 是它的驻点，设 $f_{xx}''(x_0,y_0)=A$， $f_{xy}''(x_0,y_0)=B$， $f_{yy}''(x_0,y_0)=C$，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是否取得极值的条件如下．

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，取得极值，且当 $A>0$ 时， $z=f(x,y)$ 取得极小值； $A<0$ 时，$z=f(x,y)$ 取得极大值．

（2）当 $AC-B^2<0$ 时， $z=f(x,y)$ 没有取得极值．

（3）当 $AC-B^2=0$ 时， $z=f(x,y)$ 可能取得极值，也可能没有取得极值，要用另外的方法判断．

3．条件极值

（1）函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\phi(x,y)=0$ 下的条件极值问题．

求条件极值的方法首先构造一个拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y),$$

$L(x,y,\lambda)$ 分别对 x、y 及 λ 的一阶偏导数为：

$$\begin{cases} L_x'=f_x'(x,y)+\lambda\phi_x'(x,y)=0 \\ L_y'=f_y'(x,y)+\lambda\phi_y'(x,y)=0 \\ L_\lambda'=\phi(x,y)=0 \end{cases}.$$

由这个方程组解出 x 和 y，则点 (x,y) 就可能是函数的极值点．至于如何确定所求的点是否是极值点，在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判断．

（2）函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\phi(x,y,z)=0$， $\psi(x,y,z)=0$ 下的条件极值问题．

首先构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z),$$

求其一阶偏导数，并使其为零，即

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y,z) + \lambda\phi'_x(x,y,z) + \mu\psi'_x(x,y,z) = 0 \\ L'_y = f'_y(x,y,z) + \lambda\phi'_y(x,y,z) + \mu\psi'_y(x,y,z) = 0 \\ L'_z = f'_z(x,y,z) + \lambda\phi'_z(x,y,z) + \mu\psi'_z(x,y,z) = 0 \\ L'_\lambda = \phi(x,y,z) = 0 \\ L'_\mu = \psi(x,y,z) = 0 \end{cases}.$$

求解方程组，找到可能的极值点，然后根据实际意义判断这些点是否为极值点.

8.1.7　多元函数微分学的几何应用

1．空间曲线的切线和法平面

设空间曲线Γ的方程为$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$. 假定函数$\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\omega(t)$均可导. $M_0(x_0,y_0,z_0)$为Γ上一点且对应于$t=t_0$，曲线Γ在点M_0的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0) + \psi'(t_0)(y-y_0) + \omega'(t_0)(z-z_0) = 0.$$

如果曲线Γ的方程为$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$，则可把$x$当作参数，即$\Gamma$的方程可认为是$\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$，于是$\Gamma$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{z-z_0}{\psi'(x_0)},$$

法平面方程为

$$(x-x_0) + \varphi'(x_0)(y-y_0) + \psi'(x_0)(z-z_0) = 0.$$

如果曲线的方程为$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$，则常常可由该方程组确定两个隐函数$y=\varphi(x)$，$z=\psi(x)$，并由隐函数的求导方法可求得切向量.

2．曲面的切平面和法线

设曲面Σ的方程为$F(x,y,z)=0$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$是Σ上一点. 在曲面Σ上任取一条过点M_0的曲线Γ：$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$，且该曲线在$M_0$处有切线，$t=t_0$对应于点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，曲面$\Sigma$在点$M_0$的切平面方程为

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}.$$

特别地，若曲面Σ的方程为$z=f(x,y)$，则令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$.Σ在M_0处的切平面方程为

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)=z-z_0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

8.1.8　方向导数与梯度

1. 方向导数

函数$z=f(x,y)$或$u=f(x,y,z)$在其可微点处沿任何方向l的方向导数都存在，且有下列计算公式

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\text{ 或 }\quad\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中α、β、γ为方向l的方向角.

2. 梯度

函数$u=f(x,y,z)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的梯度是一个向量，且

$$\mathbf{grad}\ u\big|_{M_0}=f_x'(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y'(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z'(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}.$$

8.2　典型例题分析

8.2.1　题型一、多元函数的概念问题

例 8.2.1　求函数$z=\arcsin(2x)+\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$的定义域.

解　$z_1=\arcsin(2x)$的定义域为：$-1\leqslant 2x\leqslant 1$；$z_2=\sqrt{4x-y^2}$的定义域为$4x-y^2\geqslant 0$；$z_3=\dfrac{1}{\ln(1-x^2-y^2)}$的定义域为$1-x^2-y^2>0$，$1-x^2-y^2\neq 1$．联立方程组

$$\begin{cases}|2x|\leqslant 1\\4x^2-y^2\geqslant 0\\1-x^2-y^2>0\\1-x^2-y^2\neq 1\end{cases},$$

因此，所求函数的定义域为

$$\left\{(x,y)\,|\,-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},y^2\leqslant 4x,0<x^2+y^2<1\right\}.$$

注　（1）求多元函数的定义域，就是要求出使其表达式有意义的点的全体．首先，要写出构成各部分的简单函数的定义域，再解联立不等式，即得所求定义域．

（2）与求一元函数的定义域相仿，需考虑：分式的分母不能为零；偶次方根号下的表达式非负；对数的真数大于零；反正弦、反余弦中的表达式的绝对值小于等于 1 等．

例 8.2.2　设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y}$，求 $f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$．

解　由题意，

$$f(u,v)=\frac{uv}{u^2+v}.$$

令 $u=xy$，$v=\dfrac{x}{y}$．则

$$f\left(xy,\frac{x}{y}\right)=\frac{xy\cdot\dfrac{x}{y}}{(xy)^2+\dfrac{x}{y}}=\frac{xy}{xy^3+1}.$$

例 8.2.3　设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y\ln x^x}$，求 $f(x,y)$．

解　令 $u=x-y$，$v=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^v$，$y=\mathrm{e}^v-u$．又因为

$$f(x-y,\ln x)=\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y\ln x^x}=\frac{(x-y)\mathrm{e}^{x-y}}{x^2\ln x},$$

因此 $f(u,v)=\dfrac{u\mathrm{e}^u}{v\mathrm{e}^{2v}}$．从而 $f(x,y)=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{y\mathrm{e}^{2y}}$．

8.2.2　题型二、多元函数的极限与连续问题

例8.2.4　设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\ (x^2+y^2\neq 0)$，试利用极限的定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0$．

证　由于

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=(x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

所以对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，总有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0$．

例 8.2.5　设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0$，$y>0$．求

（1）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；　（2）$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$．

解　（1）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{1+xy}-\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1-y\sin\left(\dfrac{\pi x}{y}\right)}{\arctan x}$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left[1-\frac{\sin\left(\dfrac{\pi x}{y}\right)}{\dfrac{\pi x}{y}}\cdot\pi x\right]=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\,.$$

（2）**解法 1**　结合洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1+2\pi x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2\pi-x+2\pi x^2}{2(1+x^2)}=\pi\,.$$

解法 2　利用泰勒展开式．

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)+\pi x^2}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x^2}{x^2}=\pi\,.$$

注　本例是以二元函数极限的形式出现的，但实际上在求极限的过程中只有一个变量在变化，而另一个变量不变化而可看作常数．

例 8.2.6　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$．

解　由于 $f(x)=\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是初等函数，而点（1,0）在其定义域内，故 $f(x)$ 在（1,0）点处连续，所以

$$f(x)=\frac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln2\,.$$

8.2.3　题型三、求解多元函数的偏导数与全微分

例 8.2.7　求下列函数的偏导数：

（1） $z=\ln\sin(x-2y)$；　　　　（2） $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

解　（1）
$$z'_x=\frac{1}{\sin(x-2y)}\cdot\cos(x-2y)=\cot(x-2y),$$
$$z'_y=\frac{1}{\sin(x-2y)}\cdot\cos(x-2y)\cdot(-2)=-2\cot(x-2y).$$

（2） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=z\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{zx^{z-1}}{y^z}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=z\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z-1}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{zx^z}{y^{z+1}}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln\dfrac{x}{y}$.

例 8.2.8　设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^5-y^3}$，求 $f'_x(0,0)$.

解　根据偏导数的定义，有
$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^5}}{\Delta x}=0.$$

注　当用公式求出的偏导数在所给点无意义时，应使用偏导数的定义进行求解．如本例中，由于
$$f'_x(x,y)=\frac{1}{3}(x^5-y^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 5x^4=\frac{5x^4}{3\cdot\sqrt[3]{(x^5-y^3)^2}},$$
显然上式在 $(0,0)$ 处没有意义，故应根据偏导数的定义求解 $f'_x(0,0)$.

例 8.2.9　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求偏导数 $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$.

解　当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，由商的求导法则得
$$f'_x(x,y)=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x^2+y^2}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$f'_y(x,y)=\frac{x\sqrt{x^2+y^2}-xy\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y}{x^2+y^2}=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$
在 $(x,y)=(0,0)$ 处，根据偏导数的定义有
$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$
$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0,$$

故

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

注　（1）讨论分段函数的偏导数时，分界点处的偏导数需按偏导数定义单独求得.

（2）本题可以使用轮换对称性求 $f'_y(x,y)$．从题设可以看到，在函数 $f(x,y)$ 的表达式中，自变量 x 与 y 的地位是相同的，所谓“地位相同”，指的是 x、y 互换，函数 $f(x,y)$ 的形式没有发生改变．显然本题符合轮换对称性的条件，故在求出 $f'_x(x,y)$ 之后，将 $f'_x(x,y)$ 表达式中的 x、y 互换，即可得到 $f'_y(x,y)$ 的表达式.

例 8.2.10　计算函数 $u=x+\sin\dfrac{y}{2}+\mathrm{e}^{yz}$ 的全微分.

解　因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{y}{2}+z\mathrm{e}^{yz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=y\mathrm{e}^{yz}$，所以函数的全微分为

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+z\mathrm{e}^{yz}\right)\mathrm{d}y+y\mathrm{e}^{yz}\mathrm{d}z.$$

8.2.4　题型四、多元函数的极值与最值问题

例 8.2.11　在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（$a>0,b>0,c>0$）内接的长方体（各边分别平行坐标轴）中，求其体积最大者.

解　设 x、y、z 为长方体在第一卦限中的顶点坐标，则长方体的体积为 $V=8xyz$，因为点 (x,y,z) 在椭球面上，所以满足方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

所求问题转化为求解函数 $V=8xyz$ 在满足条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 下的最大值问题．构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=8yz+\dfrac{2x}{a^2}\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=8zx+\dfrac{2y}{b^2}\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=8xy+\dfrac{2z}{c^2}\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0\end{cases},$$

该方程组在第一卦限 $(x>0,y>0,z>0)$ 只有一组解 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$， $y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$， $z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

下面说明这组解即为所求的解．事实上，该问题是求连续函数

$$V=8xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

在闭域 $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 上的最大值问题．根据闭区域上的连续函数的性质可知，函数的最大值一定存在，因为在边界上 $V=0$ ，所以最大值不可能在边界上取到，故只能又在开域 $x>0,\ y>0,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$ 内取到，从而唯一驻点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 即为最大值点，且长方体的最大体积为 $\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

例 8.2.12　求 $u=2xy+2yz+2xz$ 在条件 $xyz=2$ 下的条件极值.

解　约束条件为 $z=\dfrac{2}{xy}$ ，将其代入目标函数，可得 $u=2xy+\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}$ ，对函数求偏导数得

$$u'_x=2y-\frac{4}{x^2},\quad u'_y=2x-\frac{4}{y^2}.$$

令 $u'_x=u'_y=0$ ，可求得 $x_0=y_0=\sqrt[3]{2}$ ．代入约束条件得 $z_0=\sqrt[3]{2}$ ，故由判别法知函数有极小值为 $u(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})=6\sqrt[3]{4}$.

例 8.2.13　设抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到椭圆最长与最短距离.

解　椭圆上的点 $P(x,y,z)$ 到原点的距离 d 满足 $d^2=x^2+y^2+z^2$ ．构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1).$$

求 F'_x 、 F'_y 、 F'_z 、 F'_λ 、 F'_μ 后令其等于零，解方程组得到两个驻点：

$$P_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right),\quad P_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right).$$

由题意知，最短距离为 $d_1=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$ ，最长距离为 $d_2=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$.

8.2.5　题型五、多元函数微分学的几何应用

例 8.2.14　求曲线 $\varGamma$ ： $x=\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u$ ， $y=2\sin t+\cos t$ ， $z=1+\mathrm{e}^{3t}$ 在 $t=0$ 处的切线和法平面方程.

解　当 $t=0$ 时， $x=0$ ， $y=1$ ， $z=2$ ，因为

$$x'_t=\mathrm{e}^t\cos t,\quad y'_t=2\cos t-\sin t,\quad z'_t=3\mathrm{e}^{3t},$$

故 $x'_t(0)=1$ ， $y'_t(0)=2$ ， $z'_t(0)=3$ ，于是切线方程为

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3},$$

法平面方程为 $x+2(y-1)+3(z-2)=0$，即 $x+2y+3z-8=0$.

例 8.2.15　求曲线 $x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解　每个方程的两边都对 x 求导得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases},$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{z-x}{y-z},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y}{y-z},$$

代入切点坐标得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-2,1)}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-2,1)}=-1.$$

故切向量为 $(1,0,-1)$，且切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为 $(x-1)+0(y+2)-(z-1)=0$，即 $x-z=0$.

例 8.2.16　求曲面 $z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面及法线方程.

解　令 $F(x,y,z)=z-\mathrm{e}^z+2xy-3$，于是

$$F'_x\big|_{(1,2,0)}=2y\big|_{(1,2,0)}=4,\quad F'_y\big|_{(1,2,0)}=2x\big|_{(1,2,0)}=2,\quad F'_z\big|_{(1,2,0)}=(1-\mathrm{e}^z)\big|_{(1,2,0)}=0.$$

曲面在点 $(1,2,0)$ 的法向量为 $(4,2,0)$，切平面方程为

$$4(x-1)+2(y-2)+0(z-0)=0,$$

即 $2x+y-4=0$，法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{0}.$$

例 8.2.17　求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程.

解　该旋转抛物面在点 $(2,1,4)$ 处的法向量为

$$(z'_x,z'_y,-1)\big|_{(2,1,4)}=(2x,2y,-1)\big|_{(2,1,4)}=(4,2,-1),$$

故切平面方程为

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0,$$

即 $4x+2y-z-6=0$，法线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

例 8.2.18　求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面方程.

解　设 (x_0,y_0,z_0) 为曲面上的切点，于是切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0.$$

依题意，切平面方程平行于平面 $x+4y+6z=0$，故它们的法向量的坐标对应成比例，即

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6},$$

于是有 $2x_0=y_0=z_0$. 代入曲面方程，得切点坐标为 $(1,2,2)$ 或 $(-1,-2,-2)$，切平面方程为

$$2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$$

或 $-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$，即 $x+4y+6z-21=0$ 或 $x+4y+6z+21=0$.

8.2.6　题型六、方向导数与梯度

例 8.2.19　试求函数 $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ 在点 $M(3,1)$ 处沿该点到 $N(6,5)$ 方向上的方向导数.

解　由点 $M(3,1)$ 到 $N(6,5)$ 方向向量为 $\boldsymbol{l}=(3,4)$，所以单位方向向量 $\boldsymbol{l}_0=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，故

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{3}{5}(3x^2-6xy+3y^2)+\frac{4}{5}(-3x^2+6xy),$$

于是

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(3,1)}=\frac{3}{5}\times 12+\frac{4}{5}\times(-9)=0.$$

例 8.2.20　设在 xOy 平面上，各点的温度 T 与点的位置的关系为 $T=4x^2+9y^2$，试求：

（1）在点 $P(9,4)$ 处沿方向角为 $\frac{7}{6}\pi$ 的方向 l 的温度变化率；

（2）在什么方向上，点 P 处的温度变化率取得最大值，并求此最大值.

分析　（1）所求的变化率实质上是 T 沿方向 l 的方向导数.（2）所求变化率取得最大值的方向及最大值实质上是 T 在点 P 的梯度方向及梯度的模.

解　（1）因为

$$\frac{\partial T}{\partial l}=\frac{\partial T}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial T}{\partial y}\cos\beta,$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_P=8x|_{(9,4)}=72,\quad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_P=18y|_{(9,4)}=72,$$

因此

$$\alpha=\frac{7}{6}\pi,\quad \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\beta=-\frac{1}{2},$$

故

$$\left.\frac{\partial T}{\partial l}\right|_P = 72\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+72\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-36(\sqrt{3}+1).$$

（2）因为

$$\left.\mathbf{grad}\,T\right|_P=\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_P\boldsymbol{i}+\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_P\boldsymbol{j}=72\boldsymbol{i}+72\boldsymbol{j}，\quad \boldsymbol{l}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

方向角为$\frac{\pi}{4}$，变化率的最大值为

$$\left|\mathbf{grad}\ \left.T\right|_P\right|=\sqrt{72^2+72^2}=72\sqrt{2}.$$

8.3　深 化 训 练

8.3.1　填空题

（1）设$z=\mathrm{e}^{-x}-f(x-2y)$，且当$y=0$时，$z=x^2$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

（2）设$z=(xy+1)^x$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

（3）设函数$z=z(x,y)$，由方程$z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$确定，则$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

（4）【2009（3）】设$z=(x+\mathrm{e}^y)^x$，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$________.

（5）【2007（3）】设$f(u,v)$是二元可微函数，$z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$，则$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

（6）设$z=\frac{1}{x}f(xy)+y\phi(x+y)$，其中$f$、$\phi$具有二阶连续导数，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

（7）【2015（3）】 若函数$z=z(x,y)$由方程$\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$确定，则$\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,0)}=$________.

（8）【2009（1）】设$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

（9）【2011（1）】设函数$F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$________.

（10）【2013（3）】 设函数$z=z(x,y)$由方程$(z+y)^x=xy$确定，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$________.

（11）【2000（1）】曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$在点$(1,-2,2)$的法线方程为________.

（12）【2003（1）】曲面$z=x^2+y^2$与平面$2x+4y-z=0$平行的切平面方程为________.

（13）【2007（1）】设$f(u,v)$二元可微，$z=f(x^y,y^x)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

（14）【2012（1）】$\left.\mathrm{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\right|_{(2,1,1)}=$________.

（15）【2014（1）】曲面$z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$在点$(1,0,1)$切平面方程为________.

8.3.2　单项选择题

（1）【2003（1）】已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点；

（B）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点；

（C）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点；

（D）根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

（2）设 $z=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$，则点 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ 是该函数的（　　）.

（A）驻点，但不是极值点；　　（B）驻点，且是极小值点；

（C）驻点，且是极大值点；　　（D）驻点，偏导数不存在的点.

（3）设函数 $z=f(x,y)$，有 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,0)=1$，$f_y'(x,0)=x$，则 $f(x,y)=$（　　）.

（A）$1-xy+y^2$；　　（B）$1+xy+y^2$；

（C）$1-x^2y+y^2$；　　（D）$1+x^2y+y^2$.

（4）【2000（1）】 设函数 $f(x,y)$ 在点（0,0）附近有定义，且 $f_x'(0,0)=3$，$f_y'(0,0)=1$，则（　　）.

（A）$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$；

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{3,1,1\}$；

（C）曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$；

（D）曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{3,0,1\}$.

（5）【2002（1）】考虑二元函数 $f(x,y)$ 的四条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；　　② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数连续；

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微；　　④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数存在.

若用 $P\Rightarrow Q$ 表示可由性质 P 推出性质 Q，则有（　　）.

（A）②⇒③⇒①；　　（B）③⇒②⇒①；

（C）③⇒④⇒①；　　（D）③⇒①⇒④.

（6）【2005（1）】设函数 $u(x,y)=\phi(x+y)+\phi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$，其中 ϕ 有二阶导数，ψ 有一阶导数，则（　　）.

（A）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；　　（B）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；

（C）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；　　（D）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

（7）【2005（1）】设有三元方程 $xy - z\ln y + \mathrm{e}^{xz} = 1$，根据隐函数原理，存在点（0,1,1）的一个邻域，在此领域内该方程（　　）.

（A）只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$；

（B）可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z),\ z = z(x,y)$；

（C）可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z),\ z = z(x,y)$；

（D）可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z),\ y = y(x,z)$.

（8）【2006（1）】设 $f(x,y)$ 与 $\phi(x,y)$ 均可微，且 $\phi_y'(x,y) \neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\phi(x,y)=0$ 下的一个极值点，则下列选项正确的是（　　）.

（A）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$；

（B）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$；

（C）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$；

（D）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

（9）【2008（1）】函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在 $(0,1)$ 处的梯度等于（　　）.

（A）$\boldsymbol{i}$；　（B）$-\boldsymbol{i}$；　（C）$\boldsymbol{j}$；　（D）$-\boldsymbol{j}$.

（10）【2011（1）】设函数 $f(x)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(x)>0,\ f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（　　）.

（A）$f(0)>1,\ f''(0)>0$；　（B）$f(0)>1,\ f''(0)<0$；

（C）$f(0)<1,\ f''(0)>0$；　（D）$f(0)<1,\ f''(0)<0$.

（11）【2012（1）】设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，下列命题正确的是（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{|x|+|y|}$ 存在，则函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微;

（B）若 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}$ 存在，则函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微;

（C）若函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{|x|+|y|}$ 存在;

（D）若函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}$ 存在.

（12）【2013（1）】曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　　）.

（A）$x-y+z=-2$；　（B）$x+y+z=0$；

（C）$x-2y+z=-3$；　（D）$x-y-z=0$.

8.3.3　求下列二元函数的极限:

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$；　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$.

8.3.4　讨论函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处:

（1）是否连续；（2）偏导数是否存在；（3）是否可微；（4）偏导数是否连续.

8.3.5 【**2000（1）**】 设 $z = f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right) + g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f 、g 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

8.3.6 【**2001（1）**】设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 可微，且

$$f(1,1)=1,\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,\ \phi(x)=f(x,f(x,x)),$$

求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^3(x)\right|_{x=1}$.

8.3.7 【**2006（1）**】设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 具有二阶导数，且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

（1）验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$；　　（2）若 $f(1)=0,\ f'(1)=1$, 求 $f(u)$ 的表达式.

8.3.8 【**2014（1）**】设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^{2x}$.若 $f(0)=0,\ f'(0)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

8.3.9 【**2011（1）**】设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

8.3.10 【**2009（1）**】求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

8.3.11 【**2012（1）**】求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值 .

8.3.12 【**2012（1）**】求函数 $f(x,y)=\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$ 的极值.

8.3.13 【**2004（1）**】设 $z=f\left(x,y\right)$ 为由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=f\left(x,y\right)$ 的极值点和极值.

8.3.14 【**2007（1）**】求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,\ y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

8.3.15 【**2008（1）**】已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$，求 C 上距离 xOy 面最远和最近的点.

8.3.16 【**2002（1）**】设有一小山，取它的地面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$, 小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$，则：

（1）设 $M(x_0,y_0)$ 为 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面什么方向的方向导数最大？若记方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，求出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

（2）现欲利用小山举办攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使（1）中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点，试求攀登起点的位置.

8.4　深化训练详解

8.3.1 （1）$2(x-2y)-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x+2y}$．**提示** 把 $y=0$，$z=x^2$ 代入函数表达式得 $x^2=\mathrm{e}^{-x}-f(x)$，从而 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-x^2$，因此 $z=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x+2y}+(x-2y)^2$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-2y)-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x+2y}.$$

（2）$(xy+1)^x\left[\ln(x+y)+\dfrac{xy}{xy+1}\right]$．**提示** 两边取对数，有

$$\ln z=x\ln(xy+1),$$

上式两边对 x 求偏导数，得

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy+1)+x\frac{y}{xy+1},$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(xy+1)^x\left[\ln(xy+1)+\frac{xy}{xy+1}\right].$$

（3）2．**提示**　方程两边分别关于 x、y 求偏导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{2x-3z}\left(2-3\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{2x-3z}\left(-3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2,$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}},$$

故

$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6\mathrm{e}^{2x-3z}+2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}=2.$$

（4）$2\ln 2+1$．**提示**　为简化计算，先将 $y=0$ 代入 z 中得到 $z(x,0)=(x+1)^x$，z 转化为 x 的一元函数．因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}(x+1)^x}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}\right]=\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}\left[\ln(x+1)+\frac{x}{1+x}\right].$$

将 $x=1$ 代入上式，得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=\mathrm{e}^{\ln 2}(\ln 2+1/2)=2\ln 2+1.$$

（5）$-\dfrac{2y}{x}f_1'+\dfrac{2x}{y}f_2'$．**提示**　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f_1'+\frac{1}{y}f_2',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f_1'-\frac{x}{y^2}f_2',$$

则

$$x\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'，\quad y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}f_1'-\frac{x}{y}f_2'.$$

两式合并得，

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'=-\frac{2y}{x}f_1'+\frac{2x}{y}f_2'.$$

（6）$yf''(xy)+\phi'(x+y)+y\phi''(x+y)$．**提示**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\phi'(x+y)，$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=-\frac{1}{x^2}f'(xy)\cdot x+\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{y}{x}f''(xy)\cdot x+\phi'(x+y)+y\phi''(x+y)\\&=yf''(xy)+\phi'(x+y)+y\phi''(x+y).\end{aligned}$$

（7）$-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y$．**提示**　方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 两边分别对 x、y 求偏导得

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0，$$

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

将 $x=0,\ y=0$ 代入原方程求得 $z=0$，从而解得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{3},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}.$$

故

$$\mathrm{d}z=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$$

（8）$f_{12}''x+f_{22}''xy+f_2'$．**提示**　$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_1'y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{12}''x+f_{22}''xy+f_2'$.

（9）4．**提示**　先将 $y=2$ 代入函数 F 中得，

$$F(x,2)=\int_0^{2x}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t，$$

利用变上限积分函数的导数公式得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2\sin 2x}{1+4x^2}，\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{4(1+4x^2)\cos 2x-16x\sin 2x}{(1+4x^2)^2}，$$

故

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=\left.\frac{4(1+4x^2)\cos 2x-16x\sin 2x}{(1+4x^2)^2}\right|_{x=0}=4.$$

（10）$2-2\ln 2$．**提示**　方程 $(z+y)^x = xy$ 两边取对数，得

$$x\ln(z+y)=\ln(xy)=\ln x+\ln y，$$

方程两边对 x 求偏导得到

$$\ln(z+y)+\frac{x}{z+y}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}.$$

将 $x=1,\ y=2$ 代入所给方程得到 $z+2=2$，即 $z=0$．将 $x=1,\ y=2,\ z=0$ 代入上式有

$$\ln 2+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,2)}=1，$$

即 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,2)}=2-2\ln 2$．

（11）$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$．**提示**　记 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则 $F_x'=2x$，$F_y'=4y$，$F_z'=6z$，从而 $F_x'\big|_{(1,-2,2)}=2$，$F_y'\big|_{(1,-2,2)}=-8$，$F_z'\big|_{z(1,-2,2)}=12$，因此法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-2}{12}\quad 或\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}.$$

（12）$2x+4y-z-5=0$．**提示**　设切点为 (x_0,y_0,z_0)，由已知有 $z_x'=2x$，$z_y'=2y$，从而切平面的法向量为 $(2x_0,2y_0,-1)$，由于切平面与平面 $2x+4y-z=0$ 平行，则

$$\frac{2x_0}{2}=\frac{2y_0}{4}=\frac{-1}{-1}，$$

从而 $x_0=1$，$y_0=2$，进而求出 $z_0=5$，故切平面为 $2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，即 $2x+4y-z-5=0$．

（13）$yx^{y-1}f_1'+y^x\ln y\cdot f_2'$．

（14）$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$．**提示**　记 $u=xy+\dfrac{z}{y}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y，\ \frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{z}{y^2}，\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}，\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(2,1,1)}=1，\ \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(2,1,1)}=1，\ \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{(2,1,1)}=1，$$

故 $\mathbf{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\bigg|_{(2,1,1)}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$．

（15）$2x-y-z-1=0$．**提示**　由于

$$z_x'=2x(1-\sin y)-y^2\cos x，\quad z_y'=-x^2\cos y+2y(1-\sin x).$$

从而 $z_x'(1,0,1)=2$，$z_y'(1,0,1)=-1$，-1，它们即为曲面在点 $(1,0,1)$ 处的法向量的三个分量，所以在该点处的切平面方程为

$$2\cdot(x-1)+(-1)(y-0)+(-1)(z-1)=0，$$

即 $2x-y-z=1$．

8.3.2（1）（A）．**提示**　由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，分母的极限为零，因此分子的极限必为零，从而有 $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0$，且当 $|x|$ 和 $|y|$ 都充分小时，有

$$f(x,y)-xy\approx(x^2+y^2)^2.$$

于是

$$f(x,y)-f(0,0)\approx xy+(x^2+y^2)^2.$$

可见当 $y=x$ 且 $|x|$ 充分小时，

$$f(x,y)-f(0,0)\approx x^2+4x^4>0;$$

而当 $y=-x$ 且 $|x|$ 充分小时，

$$f(x,y)-f(0,0)\approx -x^2+4x^4<0.$$

说明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的充分小的邻域内既不恒大于 $f(0,0)$，又不恒小于 $f(0,0)$，所以点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

（2）（B）．**提示**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(2x+2y^2+4y+1)\mathrm{e}^{2x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=(2y+2)\mathrm{e}^{2x},$$

将 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ 代入满足方程，是驻点．且

$$A=4(x+y^2+2y+1)\mathrm{e}^{2x}\Big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=2\mathrm{e}>0,$$

$$B=(4y+4)\mathrm{e}^{2x}\Big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=0,$$

$$C=2\mathrm{e}^{2x}\Big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=2\mathrm{e}.$$

由于 $AC-B^2>0$， $A>0$，因此 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ 为函数的极小值点.

（3）（B）．**提示**　等式 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$ 两边对 y 积分，得 $f_y'(x,y)=2y+\phi(x)$，将 $f_y'(x,0)=x$ 代入上式，得 $\phi(x)=x$，于是 $f_y'(x,y)=2y+x$，该式两边再对 y 积分，得

$$f(x,y)=y^2+xy+\varphi(x),$$

将 $f(x,0)=1$ 代入上式，得 $\varphi(x)=1$，故 $f(x,y)=y^2+xy+1$.

（4）（C）．　（5）（A）．　（6）（B）．　（7）（D）．　（8）（D）．　（9）（A）．

（10）（A）．**提示**　由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x)\ln f(y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f(x)\frac{f'(y)}{f(y)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)\ln f(y)\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{f'(x)f'(y)}{f(y)}\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)\frac{f''(y)f(y)-[f'(y)]^2}{[f(y)]^2}\,,$$

在点$(0,0)$处，

$$A=f''(0)\ln f(0)\,,\quad B=0\,,\quad C=f''(0)\,.$$

所以当$f(0)>1$且$f''(0)>0$时，$B^2-AC<0$，$A>0$，故函数取得极小值.

（11）（B）. **提示** 对于选项（A），设$f(x,y)=|x|+|y|$，则它在$(0,0)$处连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=1$，则由$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$不存在，知$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微，所以（A）错误；对于选项（B），由$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}$存在，且$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续可知，当$x\to0,\ y\to0$时，

$$f(x,y)=f(0,0)+o(x^2+y^2)=f(0,0)+0\cdot x+0\cdot y+o(\sqrt{x^2+y^2})\,,$$

因此，函数$f(x,y)$在点$(0,0)$可微，从而选项（B）正确.

（12）（A）. **提示** 记$F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$，则

$$F'_x=2x-y\sin(xy)+1\,,\quad F'_y=-x\sin(xy)+z\,,\quad F'_z=y\,,$$

从而$F'_x|_{(0,1,-1)}=1$，$F'_y|_{(0,1,-1)}=-1$，$F'_z|_{(0,1,-1)}=1$，因此切平面方程为

$$1\times(x-0)+(-1)\times(y-1)+1\times(z+1)=0\,,$$

即$x-y+z+2=0$.

8.3.3 （1）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}\cdot\lim\limits_{y\to2}y=2$.

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(\sqrt{1+xy}-1)(\sqrt{1+xy}+1)}{xy(\sqrt{1+xy}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{\sqrt{1+xy}+1}=\dfrac{1}{2}$.

8.3.4 （1）当$(x,y)\neq(0,0)$时，$|f(x,y)|\leqslant x^2+y^2$，故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以函数在$(0,0)$处连续.

（2）
$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}=0\,,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{y^2}}=0\,.$$

（3）由（2）知，$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，故

$$\begin{aligned}\Delta z-[f'_x(0,0)\cdot\Delta x+f'_y(0,0)\cdot\Delta y]&=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y]\\&=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta z-[f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0,$$

故函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，且 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=0\cdot\mathrm{d}x+0\cdot\mathrm{d}y=0$.

（4）当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

不存在，事实上若沿着直线 $y=x$ 方向趋于原点时，即

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=x}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|},$$

上述极限不存在，故偏导数 $f_x'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续，同样 $f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

8.3.5　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'-\dfrac{y}{x^2}g'$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''.$$

8.3.6　由题意

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^3(x)=3\phi^2(x)\phi'(x)；\qquad \phi(1)=f(1,f(1,1))=1；$$

$$\phi'(x)=f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))\cdot[f_1'(x,x)+f_2'(x,x)]；$$

因此 $\phi'(1)=17$，故 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^3(x)\Big|_{x=1}=51$.

8.3.7　（1）令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{u}f'(u)$，所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y^2}{u^3}f'(u)+\dfrac{x^2}{u^2}f''(u)$；

根据对称性有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^2}{u^3}f'(u)+\dfrac{y^2}{u^2}f''(u)$，因此

$$\begin{aligned}0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{y^2}{u^3}f'(u)+\frac{x^2}{u^2}f''(u)+\frac{x^2}{u^3}f'(u)+\frac{y^2}{u^2}f''(u)\\&=f''(u)+\frac{f'(u)}{u},\end{aligned}$$

结论得证.

（2）由 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$ 得 $uf''(u)+f'(u)=0$；即 $[uf'(u)]'=0$，所以 $uf'(u)=C_1$. 由 $f'(1)=1$ 得 $C_1=1$，从而 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$，所以 $f(u)=\ln u+C$；由 $f(1)=0$ 得 $C=0$；所以 $f(u)=\ln u$.

8.3.8　由题意

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y\cdot f',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y\cdot f',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\mathrm{e}^x\cos y\cdot f'+\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y\cdot f'',\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\mathrm{e}^x\cos y\cdot f'+\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y\cdot f'',$$

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}f''$. 令 $u=\mathrm{e}^x\cos y$，由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(4z+\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{e}^{2x}$ 得 $f''(u)=4f(u)+u$，解微分方程得

$$f(u)=C_1\mathrm{e}^{-2u}+C_2\mathrm{e}^{2u}-\frac{1}{4}u,$$

又因为 $f(0)=0,\ f'(0)=0$，得 $C_1=-\dfrac{1}{16},\ C_2=\dfrac{1}{16}$，所以 $f(u)=\dfrac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{2u}-\mathrm{e}^{-2u}\right)-\dfrac{1}{4}u$.

8.3.9　由题意得 $g'(1)=0$，而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yf_2'\cdot g'(x),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[xf_{11}''+f_{12}''\cdot g(x)]+f_2'\cdot g'(x)+yg'(x)[xf_{21}''+f_{22}''g(x)],$$

又因为 $g(1)=1$，所以 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$.

8.3.10　令 $\begin{cases}f_x'=2x(2+y^2)=0\\ f_y'=2x^2y+\ln y+1=0\end{cases}$ 得唯一驻点 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$，又因为

$$A=f_{xx}''\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=2\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)>0,\quad B=f_{xy}''\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=0,\quad C=f_{yy}''\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=\mathrm{e},$$

所以 $AC-B^2>0$，从而 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 是极小值点，极小值为 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

8.3.11　令 $\begin{cases}f_x'=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\\ f_y'=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\end{cases}$ 得驻点 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$. 记

$$A=f_{xx}''(x_0,y_0),\quad B=f_{xy}''(x_0,y_0),\quad C=f_{yy}''(x_0,y_0),$$

对于点 $(1,0)$，$A=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<0$，$B=0$，$C=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，所以 $AC-B^2>0$，所以 $(1,0)$ 是极大值点，极大值为 $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

对于点 $(-1,0)$，$A=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}>0$，$B=0$，$C=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，所以 $AC-B^2>0$，所以 $(-1,0)$ 是极小值点，极小值为 $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

8.3.12　令 $\begin{cases} f_x'=(x^2+\dfrac{x^3}{3}+y)\mathrm{e}^{x+y}=0 \\ f_y'=(1+\dfrac{x^3}{3}+y)\mathrm{e}^{x+y}=0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$，$\begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$. 记

$$A=f_{xx}''(x_0,y_0)，\quad B=f_{xy}''(x_0,y_0)，\quad C=f_{yy}''(x_0,y_0)，$$

对于点 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$，$A=-\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}<0$，$B=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}$，$C=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}$，所以 $AC-B^2<0$，所以 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 不是极值点.

对于点 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$，$A=3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}>0$，$B=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$，$C=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$，所以 $AC-B^2>0$，所以 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 是极小值点，极小值为. $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

8.3.13　方程两边对 x 求偏导：　$2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-3y}{y+z}. \tag{1}$$

方程两边对 y 求偏导：$-6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-3x+10y-z}{y+z}. \tag{2}$$

联立（1）（2）解得 $\begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-9 \\ y=-3 \end{cases}$；记 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

对于点 $(9,3)$，$A>0$，$AC-B^2>0$，所以 $(9,3)$ 是极小值点，且 $f(9,3)=3$；

对于点 $(-9,-3)$，$A<0$，$AC-B^2>0$，所以 $(-9,-3)$ 是极大值点，且 $f(9,3)=-3$.

8.3.14　当 $x^2+y^2<4,\ y>0$ 时，由 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-2xy^2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4y-2x^2y=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases}$.

当 $x^2+y^2=4,\ y\geqslant 0$ 时，设拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4).$$

令 $F_x'=0$，$F_y'=0$，$F_\lambda'=0$，得 $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$，$\begin{cases} x=\pm 2 \\ y=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$；另外当 $y=0$ 时，$f(x,y)=x^2$，

所以得驻点 $(0,0)$. 计算函数值

$$f(\pm\sqrt{2},1)=2,\ f(0,2)=8,\ f(\pm 2,0)=4,\ f\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{7}{4},\ f(0,0)=0 .$$

所以函数在 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant 4,\ y\geqslant 0\}$ 上的最大值为 $f(0,2)=8$ 和最小值为 $f(0,0)=0$.

8.3.15　设 $P(x,y,z)$ 是曲线上任意一点，它到平面的距离为 $d=|z|$，设拉格朗日函数为

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5),$$

令 $F_x'=0$，$F_y'=0$，$F_z'=0$，$F_\lambda'=0$，$F_\mu'=0$，得 $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-5\\y=-5\\z=5\end{cases}$，故曲线 C 上距离 xOy 面最远和最近的点分别为 $(1,1,1),\ (-5,-5,5)$.

8.3.16　（1）　$h(x,y)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度的方向导数最大，且方向导数的最大值即为梯度的模，而梯度

$$\mathbf{grad}\ h\big|_M=\{y_0-2x_0,x_0-2y_0\},$$

所以 $g(x_0,y_0)=\sqrt{5x_0{}^2+5y_0{}^2-8x_0y_0}$.

（2）设拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75),$$

令 $F_x'=0$，$F_y'=0$，$F_\lambda'=0$，得 $y=-x$ 或 $\lambda=-2$. 当 $y=-x$ 解得 $\begin{cases}x=5\\y=-5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-5\\y=5\end{cases}$；当 $\lambda=-2$ 时，解得 $\begin{cases}x=5\sqrt{3}\\y=5\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-5\sqrt{3}\\y=-5\sqrt{3}\end{cases}$；而

$$\mathbf{grad}\,(5,-5)=\mathbf{grad}\,(-5,5)=15\sqrt{2}\ ;\quad \mathbf{grad}\,(5\sqrt{3},5\sqrt{3})=\mathbf{grad}\,(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})=5\sqrt{6}\ ;$$

所以可以选择 $(5,-5),\ (-5,5)$ 作为攀登的起点.

8.5　综合提高训练

例 8.5.1　函数 $f(x,y)$ 在点（x_0,y_0）处的偏导数都存在，是 $f(x,y)$ 在该点处________.

（A）连续的充分条件；　　（B）连续的必要条件；

（C）可微的必要条件；　　（D）可微的充分条件.

解　选项（A）不正确，若取函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

显然有 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

选项（B）不正确. 例如，取 $f(x,y)=|xy|$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处连续，但偏导数 $f_x'(0,1)$ 不存在.

选项（D）不正确．例如，取函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

在点 $(0,0)$ 处有 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，由例 8.2.9 可知，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微；

选项（C）正确．若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，且 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

例 8.5.2　【2016（1）】设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$ ________.

解　$(x+1)x-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边分别关于 x、y 求导得

$$z+(x+1)z_x'=2xf(x-z,y)+x^2f_1'(x-z,y)(1-z_x'),$$

$$(x+1)z_y'-2y=x^2(f_1'(x-z,y)(-z_y')+f_2'(x-z,y)),$$

将 $x=0,\ y=1,\ z=1$，代入得 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.

例 8.5.3　【2012（3）】设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $\mathrm{d}z\,|_{(0,1)}=$ ________.

解　依据可微的定义，所给极限可以整理为

$$0=\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-1-[2x-1(y-1)]}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-f(0,1)-[f_x'(0,1)(x-0)+f_y'(0,1)(y-1)]}{\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}},$$

比较易知 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处可微，且

$$f_x'(0,1)=2,\ f_y'(0,1)=-1,\ f(0,1)=1,$$

故

$$\mathrm{d}z\,|_{(0,1)}=f_x'(0,1)\mathrm{d}x+f_y'(0,1)\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y\ .$$

例 8.5.4　设函数 $f(x,y)$ 可微，且满足

$$f_x'(x,y)=-f(x,y),f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(0,y+\dfrac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right]^n=\mathrm{e}^{\cot y},$$

求 $f(x,y)$ 的表达式.

解法 1　先计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{f(0,y)}\right]^n=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{\frac{1}{n}\cdot f(0,y)}}=\mathrm{e}^{\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}},$$

由题意，得

$$\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}=\frac{\mathrm{d}\ln f(0,y)}{\mathrm{d}y}=\cot y,$$

对 y 积分得

$$\ln f(0,y)=\ln\sin y+\ln C,$$

故 $f(0,y)=C\sin y$．由 $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$，解得 $C=1$，即 $f(0,y)=\sin y$．又由 $f_x'(x,y)=-f(x,y)$，对 x 积分得

$$f(x,y)=\phi(y)\mathrm{e}^{-x},$$

由 $f(0,y)=\sin y$ 知 $\phi(y)=\sin y$，所以 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin y$．

解法 2　视 y 为常数，求解分离变量方程 $\frac{\mathrm{d}f(x,y)}{f(x,y)}=-\mathrm{d}x$，得

$$\ln f(x,y)=-x+\ln\phi(y),$$

即 $f(x,y)=\phi(y)\mathrm{e}^{-x}$．由题意，得

$$\mathrm{e}^{\cot y}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\phi\left(y+\frac{1}{n}\right)}{\phi(y)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\phi\left(y+\frac{1}{n}\right)-\phi(y)}{\phi(y)}\right]^n=\mathrm{e}^{\frac{\phi'(y)}{\phi(y)}},$$

因此 $\frac{\phi'(y)}{\phi(y)}=\cot y$，两边积分并整理得 $\phi(y)=C\sin y$，又因为 $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，解得 $C=1$，故 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\sin y$．

例 8.5.5　设 $z=x^3f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$（$f$ 具有二阶连续偏导数），求 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

解　$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\left(f_1'x+f_2'\frac{1}{x}\right)=x^4f_1'+x^2f_2'.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4(f_{11}''x+f_{12}''\frac{1}{x})+x^2(f_{21}''x+f_{22}''\frac{1}{x})=x^5f_{11}''+2x^3f_{12}''+xf_{22}''.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^4f_1'+x^2f_2')\\&=4x^3f_1'+x^4\left[f_{11}''y+f_{12}''\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]+2xf_2'+x^2\left[f_{21}''y+f_{22}''\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]\\&=4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''.\end{aligned}$$

例 8.5.6　设 $x^2+z^2=yf\left(\dfrac{z}{y}\right)$，其中 f 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　令 $F(x,y,z)=x^2+z^2-yf\left(\dfrac{z}{y}\right)$，则

$$F'_y=-f\left(\frac{z}{y}\right)+\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right),\quad F'_z=2z-f'\left(\frac{z}{y}\right),$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{-f\left(\frac{z}{y}\right)+\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)}{2z-f'\left(\frac{z}{y}\right)}=\frac{yf\left(\frac{z}{y}\right)-zf'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz-yf'\left(\frac{z}{y}\right)}.$$

例 8.5.7　设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2-5xyz=0$ 确定，求 $f'_x(1,1,1)$.

解　对方程 $x^2+y^2+z^2-5xyz=0$ 两边关于 x 求导得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-5yz-5x\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

把 $x=1$，$y=1$，$z=1$ 代入上式得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-1$．又因为

$$f'_x=y^2z^3+3xy^2z^2\frac{\partial z}{\partial x},$$

故

$$f'_x(1,1,1)=1+3\times(-1)=-2.$$

例 8.5.8　设 $\begin{cases}u=f(ux,v+y)\\ v=g(u-x,v^2y)\end{cases}$（$f$, g 具有二阶连续偏导数），求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解　令 $s=ux,\ t=v+y;\ \phi=u-x,\ \psi=v^2y$．则方程组为

$$f'_1=\frac{\partial f}{\partial s},\ f'_2=\frac{\partial f}{\partial t},\ g'_1=\frac{\partial g}{\partial \phi},\ g'_2=\frac{\partial g}{\partial \psi}.$$

方程组两端对 x 求偏导数：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial s}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial \phi}\cdot\dfrac{\partial \phi}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial \psi}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\end{cases}.$$

方程组两端对 x 求偏导数：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial s}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial \phi}\cdot\dfrac{\partial \phi}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial \psi}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\end{cases}.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x})+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'\cdot(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1)+g_2'\cdot 2yv\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}.$$

$$\begin{cases}(xf_1'-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=-uf'\\ g_1'\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2yvg'-1)\dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'\end{cases}.$$

在 $D=\begin{vmatrix}xf_1'-1 & f_2'\\ g_1' & 2yvg_2'-1\end{vmatrix}=(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'\neq 0$ 的条件下，方程组有唯一解.

$$D_1=\begin{vmatrix}-uf_1' & f_2'\\ g_1' & 2yvg_2'-1\end{vmatrix}=-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'\,g_1',$$

$$D_2=\begin{vmatrix}xf_1'-1 & -uf_1'\\ g_1' & g_1'\end{vmatrix}=g_1'(xf_1'+uf_1'-1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'\,g_1'}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}.$$

例 8.5.9　【2015（1）】已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解　因为函数在每一点沿梯度方向的方向导数最大，且最大方向导数是该点梯度向量的长度，而

$$\mathbf{grad}\,f(x,y)=(1+y,1+x),\qquad |\mathbf{grad}\,f(x,y)|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2},$$

因此本题实质上就是求函数 $\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ 在条件 $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值. 构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3),$$

则

$$\begin{cases}F_x'=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0\\ F_y'=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0\\ F_\lambda'=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases},$$

解得

$$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases},\qquad \begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases},\qquad \begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases},\qquad \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}.$$

又 $|\mathbf{grad}\,f(1,1)|=2\sqrt{2}$，$|\mathbf{grad}\,f(0,0)|=0$，$|\mathbf{grad}\,f(2,-1)|=3$，$|\mathbf{grad}\,f(-1,2)|=3$，

所以 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

第 9 章　重　积　分

9.1　知 识 要 点

9.1.1　二重积分的概念与性质

1．二重积分的概念

设函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有定义. 将区域 D 任意分成 n 小区域：$\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 个小区域，也表示该小区域的面积，记 d_i 为 $\Delta\sigma_i$ 的直径，在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，且极限值与区域 D 的分法及点 (ξ_i,η_i) 的取法无关，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上是**可积**的，并称此极限为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的**二重积分**，记为 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\text{，}$$

其中 $f(x,y)$ 称为**被积函数**，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为**被积表达式**，$\mathrm{d}\sigma$ 称为**面积元素**，x 与 y 称为**积分变量**，D 称为**积分区域**.

2．二重积分的性质

设函数 $f(x,y)$、$g(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积.

性质 1　设 k、l 为常数，则 $kf(x,y)\pm lg(x,y)$ 在闭区域 D 上可积，且

$$\iint\limits_D[kf(x,y)\pm lg(x,y)]\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm l\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma\text{ .}$$

性质 2（积分对区域的可加性）　如果闭区域 D 被有限条曲线分为有限个部分闭区域，那么在 D 上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和. 例如，若 D 分成两个闭区域 D_1 和 D_2，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\text{ .}$$

性质 3　若 $f(x,y)=1$，σ 为 D 的面积，则 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\sigma$.

性质 4　若在 D 上有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma\text{ .}$$

特别地，$|f(x,y)|$ 在区域 D 上可积，且

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma .$$

性质 5（估值定理）　若在 D 上有 $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$，这里 M 、m 分别表示为 $f(x,y)$ 在 D 上最大值和最小值，σ 为 D 的面积，则

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma .$$

性质 6（二重积分的中值定理）　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，σ 为 D 的面积，则至少存在一点 $(\xi,\eta) \in D$，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma .$$

9.1.2　利用直角坐标系计算二重积分

1. X–型区域

设 $f(x,y)$ 积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), a \leqslant x \leqslant b\}$．如图 9.1 所示，其中函数 $\varphi_1(x)$ 、$\varphi_2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，此类区域称为 X –型区域，X –型区域的特点是穿过 D 内部且平行于 Y 轴的直线与 D 的边界相交不多于两点．此时

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y .$$

2. Y –型区域

如果积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), c \leqslant y \leqslant d\}$．如图 9.2 所示，其中函数 $\psi_1(y)$ 、$\psi_2(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续，此区域我们称为 Y –型区域，Y –型区域的特点是穿过 D 内部且平行于 X 轴的直线与 D 的边界相交不多于两点．此时

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x .$$

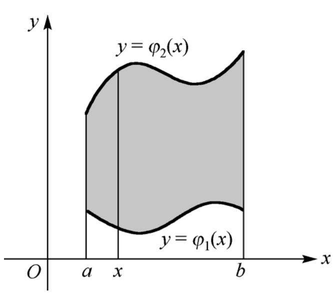


图 9.1

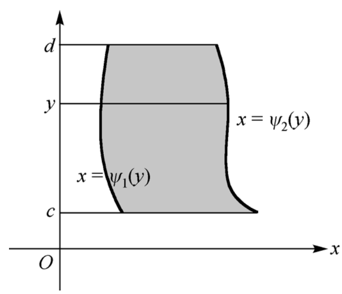


图 9.2

注　计算二重积分时，选择 X –型区域，还是选择 Y –型区域进行积分，取决于被积函数和积分区域．选取的原则首先是可积，其次是积分过程简单．

9.1.3 利用极坐标计算二重积分

1．极点 O 在区域 D 外的情形

设在极坐标系下区域 D 的边界曲线为 $r=r_1(\theta)$ 和 $r=r_2(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，其中 $r_1(\theta)$ 和 $r_2(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续．如图 9.3 所示，区域 D 可以表示为

$$D=\{(r,\theta)\,|\,r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}.$$

于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

2．极点 O 在区域 D 的边界上的情形

如图 9.4 所示，区域 D 可以表示成

$$D=\{(r,\theta)\,|\,0\leqslant r\leqslant r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}.$$

于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

3．极点 O 在区域 D 内的情形

如图 9.5 所示，区域 D 可以表示成

$$D=\{(r,\theta)\,|\,0\leqslant r\leqslant r(\theta),0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

注 当区域 D 是圆或圆的一部分，或者区域 D 的边界方程用极坐标表示较为简单，或者被积函数为 $f(x^2+y^2)$，$f\left(\dfrac{x}{y}\right)$，$f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 等形式时，一般采用极坐标计算二重积分．

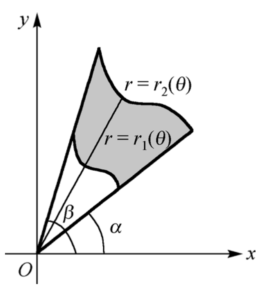


图 9.3

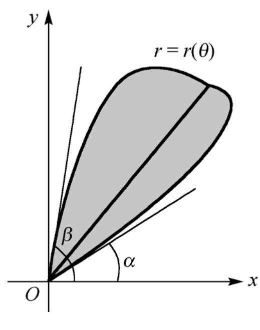


图 9.4

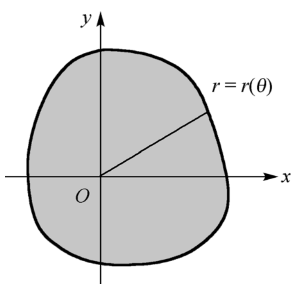


图 9.5

9.1.4 利用对称性求解二重积分

（1）若积分区域 D 关于 y 轴对称，D 在 y 轴右侧的区域记为 D_1：

1）若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(-x,y)=-f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

2）若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(-x,y)=f(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

（2）若积分区域 D 关于 x 轴对称，D 在 x 轴上侧的区域记为 D_1：

1）若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(x,-y)=-f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

2）若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(x,-y)=f(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

（3）若积分区域 D 关于原点对称，D 分成关于原点对称的两个区域 D_1 和 D_2：

1）若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(-x,-y)=-f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

2）若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(-x,-y)=f(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

9.1.5　三重积分的概念

设函数 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数．将区域 Ω 任意分成 n 个小区域：$\Delta v_1,\Delta v_2,\cdots,\Delta v_n$，其中 $\Delta v_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 个小区域，也表示它的体积．在每个 Δv_i 上任取一点 $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i$．如果当各小闭区域直径中的最大值 $\lambda\to0$ 时，这和的极限总存在，且与闭区域 Ω 的分法及点 $(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$ 的取法无关，那么称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的**三重积分**，记为 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$，即

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta v_i ,$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为**被积函数**，$f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 称为**被积表达式**，$\mathrm{d}v$ 称为**体积元素**，x,y,z 称为**积分变量**，Ω 称为**积分区域**.

9.1.6　利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数 $f(x,y,z)\geqslant0$，并将它看作某物体的密度函数，通过计算该物体的质量引出下列各计算方法.

方法 1　投影法（“先一后二”）．记

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y) \\ (x,y)\in D_z \end{cases},$$

该物体的质量为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iint\limits_{D}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z .$$

方法 2　截面法（“先二后一”）．记

$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z \\ a\leqslant z\leqslant b\end{cases},$$

该物体的质量为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_a^b\left(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \int_a^b\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

方法 3　三次积分法．记

$$\Omega:\begin{cases}z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y) \\ (x,y)\in D:\begin{cases}y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x) \\ a\leqslant x\leqslant b\end{cases}\end{cases},$$

利用投影法得该物体的质量为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_a^b\mathrm{d}z\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z .$$

9.1.7　利用柱面坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$，将 x、y 用极坐标 ρ、θ 代替，则 (ρ,θ,z) 就称为点 M 的**柱面坐标**．直角坐标与柱面坐标的关系

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z\end{cases},$$

则三重积分可计算如下：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z .$$

适用范围：

（1）积分区域表面用柱面坐标表示时方程简单；

（2）被积函数用柱面坐标表示时变量相互分离．

9.1.8　利用球面坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$，将 x、y、z 用球面坐标 r、ϕ、θ 代替，直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases}x=r\sin\phi\cos\theta \\ y=r\sin\phi\sin\theta \\ z=r\cos\phi\end{cases},$$

三重积分可计算如下：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} F(r,\theta,\phi) r^2 \sin\phi \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta .$$

适用范围：

（1）积分区域表面用球面坐标表示时方程简单；

（2）被积函数用球面坐标表示时变量相互分离.

9.1.9　重积分的应用

1．曲面的面积

设光滑曲面 Σ 的方程为 $z = z(x,y)$，则 Σ 的面积为 $A = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

设光滑曲面 Σ 的方程为 $x = x(y,z)$，则 Σ 的面积为 $A = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

设光滑曲面 Σ 的方程为 $y = y(x,z)$，则 Σ 的面积为 $A = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

其中 D_{xy}、D_{yz}、D_{xz} 分别为 Σ 在 xOy 、 yOz 、 zOx 面上的投影区域.

2．质心

设平面薄片占有 xOy 面上的闭区域 D ，在点 (x,y) 处的面密度为 $\mu = \mu(x,y)$ ，假定 $\mu = \mu(x,y)$ 在 D 上连续，则平面薄片的质心坐标为

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_{D} x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D} \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}, \qquad \overline{y} = \frac{\iint\limits_{D} y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D} \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} .$$

如果薄片是均匀的，即面密度 $\mu = \mu(x,y)$ 为常量，则薄片的质心的坐标为

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_{D} x\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{D} \mathrm{d}\sigma}, \qquad \overline{y} = \frac{\iint\limits_{D} y\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{D} \mathrm{d}\sigma},$$

其中 $\iint\limits_{D} \mathrm{d}\sigma$ 为闭区域 D 的面积．这种情况下，薄片的质心完全由闭区域 D 的形状所决定，故均匀平面薄片的质心又叫**形心**.

类似地，占有空间为有界闭区域 Ω ，在点 (x,y,z) 处的面密度为 $\rho = \rho(x,y,z)$ ，且 $\rho = \rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则其质心坐标为

$$\overline{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\mathrm{d}v}, \quad \overline{y} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\mathrm{d}v}, \quad \overline{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\mathrm{d}v} .$$

3．转动惯量

设平面薄片占有 xOy 面上的闭区域 D，在点 (x,y) 处的面密度为 $\mu=\mu(x,y)$，假定 $\mu=\mu(x,y)$ 在 D 上连续，则该薄片对于 x 轴、y 轴的转动惯量分别为

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

类似地，占有空间有界闭区域 Ω，在点 (x,y,z) 处的面密度为 $\rho=\rho(x,y,z)$，假定 $\rho=\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则其对于 x 轴、y 轴、z 轴的转动惯量分别为

$$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$I_y=\iiint_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

4．引力

质量为 m 的质点位于 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处，物体占有空间闭域 Ω，其密度为 $\rho(x,y,z)$，设物体对质点的引力为 $\vec{F}=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}$，则

$$F_x=km\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\frac{x-x_0}{r^3}\mathrm{d}v,$$

$$F_y=km\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\frac{y-y_0}{r^3}\mathrm{d}v,$$

$$F_z=km\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\frac{z-z_0}{r^3}\mathrm{d}v,$$

其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，$k$ 为引力常数.

9.2　典型例题分析

9.2.1　题型一、重积分的概念问题

例 9.2.1　改变二次积分的积分次序：$\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

解　如图 9.6 所示，将积分区域 D 表示为 Y-型区域，

$$D=\{(x,y)\,|\,\sqrt{y}\leqslant x\leqslant 2,1\leqslant y\leqslant 4\},$$

则

$$\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_1^4\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

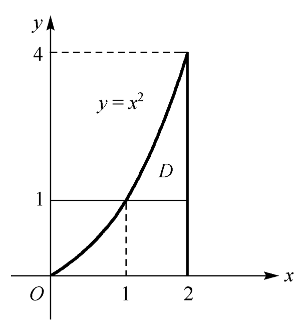


图 9.6

例 9.2.2　更换积分次序 $I=\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\,\mathrm{d}y\ (a>0)$.

解　如图 9.7 所示，积分区域 D 表示为 Y-型区域，则 $D=D_1\cup D_2\cup D_3$ ，其中

$$D_1: 0\leqslant y\leqslant a,\ \frac{y^2}{2a}\leqslant x\leqslant a-\sqrt{a^2-y^2}\ ;$$

$$D_2: 0\leqslant y\leqslant a,\ a+\sqrt{a^2-y^2}\leqslant x\leqslant 2a\ ;$$

$$D_3: a\leqslant y\leqslant 2a,\ \frac{y^2}{2a}\leqslant x\leqslant 2a\ .$$

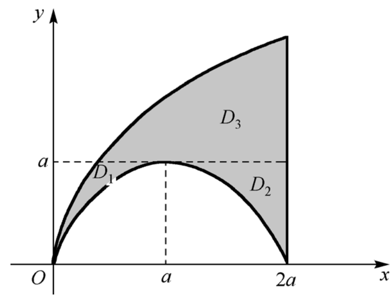


图 9.7

从而

$$I=\int_0^a\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^a\mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x\ .$$

9.2.2　题型二、利用直角坐标系计算二重积分

例 9.2.3　计算二重积分：

（1）$\iint\limits_D y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 D 为 $x=1,\ x=2,\ y=2,\ xy=1$ 所围成的平面区域.

（2）$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 D 为抛物线 $y^2=x$ 和直线 $y=x-2$ 所围成的平面区域.

解　（1）如图 9.8 所示，区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2\}$ ，选择先对 y 积分后对 x 积分．于是

$$\iint\limits_D y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^2 y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\int_{\frac{1}{x}}^2 xy\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}(xy)$$

$$=\int_1^2\frac{1}{x^2}(xy-1)\mathrm{e}^{xy}\Big|_{\frac{1}{x}}^2\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{(2x-1)\mathrm{e}^{2x}}{x^2}\mathrm{d}x.$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\Big|_1^2=\frac{\mathrm{e}^4}{2}-\mathrm{e}^2.$$

（2）**解法 1**　如图 9.9 所示，若采用先对 y 积分后对 x 的累次积分，则区域 D 可分为 D_1 和 D_2 两部分，其中

$$D_1=\{(x,y)|-\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 1\}\ ,$$

$$D_2=\{(x,y)|x-2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 4\}\ .$$

则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}xy\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}xy\mathrm{d}y$$

$$=0+\frac{1}{2}\int_1^4 x[x-(x-2)^2]\mathrm{d}x=\frac{45}{8}\ .$$

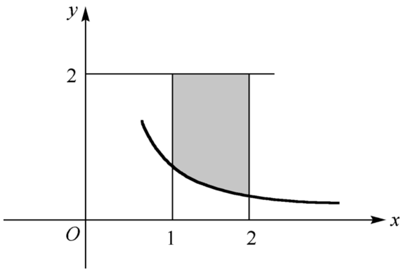


图 9.8

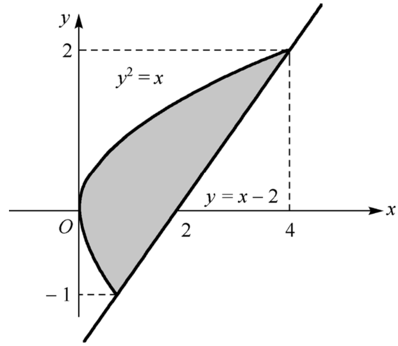


图 9.9

解法 2 若采用先对 x 积分后对 y 的累次积分．这时 D 可表示为 Y −型区域

$$D=\{(x,y)\,|\,y^2\leqslant x\leqslant y+2,-1\leqslant y\leqslant 2\},$$

则

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}y[(y+2)^2-y^4]\mathrm{d}y=\frac{45}{8}.$$

注 积分次序不同，解题的难易程度可能不同．对于例 9.2.3 而言，解法 2 较为简洁．有些时候，积分次序选择的不恰当，可能导致二重积分无法计算．

例 9.2.4 计算 $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x$，$y=\frac{1}{x}$，$x=2$ 围成．

解 将积分区域 D 表示为 X −型区域，即 $D=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x\}$，从而

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y=\int_1^2\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}x=\int_1^2(x^3-x)\,\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

例 9.2.5 计算 $\iint_D |y-x^2|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D:-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$.

解 如图 9.10 所示，记 $D_1:\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ x^2\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$，$D_2:\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant x^2\end{cases}$.

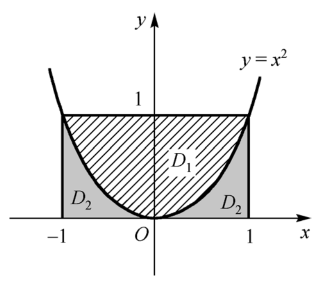


图 9.10

则

$$\begin{aligned}\iint_D |y-x^2|\,\mathrm{d}\sigma&=\iint_{D_1}(x^2-y)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(y-x^2)\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(y-x^2)\mathrm{d}y=\frac{11}{15}.\end{aligned}$$

例 9.2.6 求两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围成的立体的表面积．

解 由题意，所求表面积为

$$\begin{aligned}S&=16\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\frac{16R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}\sigma=\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{16R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\\&=16\int_0^R R\mathrm{d}x=16R^2.\end{aligned}$$

9.2.3　题型三、利用极坐标计算二重积分

利用极坐标计算二重积分，只需把被积函数中的 x、y 分别换成 $r\cos\theta$、$r\sin\theta$，面积元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 换成 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 即可，积分次序一般为先对 r 积分后对 θ 积分.

例 9.2.7　将 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为二次积分，D 是由 $y=\sqrt{4-x^2}$，$y=\sqrt{2x-x^2}$，$x=0$ 围成的闭区域.

解　积分区域如图 9.11 所示．在极坐标系下，闭区域 D 可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 2\cos\theta\leqslant r\leqslant 2.$$

因此

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\ .$$

例 9.2.8　计算 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $r=a$ 和心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 所围的面积（取圆 $r=a$ 的外部）.

解　积分区域如图 9.12 所示.

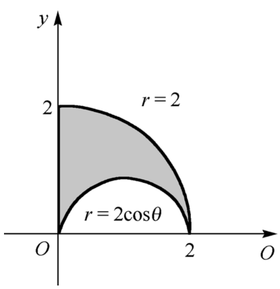


图 9.11

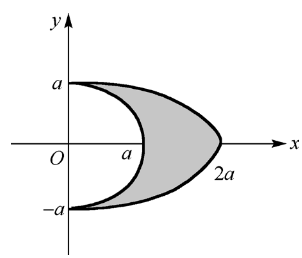


图 9.12

在极坐标系下，闭区域 D 可表示为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad a\leqslant r\leqslant a(1+\cos\theta),$$

因此

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D r\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)}r\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^3[(1+\cos\theta)^3-1]\mathrm{d}\theta=a^3\left(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2}\right).$$

例 9.2.9　计算下列二重积分.

（1）$\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆周 $x^2+y^2=4$ 和 $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的在第一象限的区域.

（2）$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆周 $x^2+y^2=2x$ 所围成的区域.

解　（1）采用极坐标系．积分区域 D 可表示为

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|1\leqslant r\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

于是

$$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\arctan\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\theta r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\theta r^2\Big|_1^2\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\theta(4-1)d\theta=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{16}=\frac{3\pi^2}{64}.$$

（2）采用极坐标系．圆周 $x^2+y^2=2x$ 的极坐标方程为 $r=2\cos\theta$，积分区域可表示为

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

于是

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot r\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}8\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}(\sin\theta)=\frac{32}{9}.$$

例 9.2.10　已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle|2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　由题意

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\frac{r^3}{3}\Big|_2^{2(1+\cos\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta+8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta+\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2\theta+1}{2}\mathrm{d}\theta+8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1\text{-}\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\sin\theta+\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\sin\theta$$

$$=4\left(\frac{\sin2\theta}{2}+\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+8\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=4\pi+\frac{32}{3}-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=5\pi+\frac{32}{3}.$$

例 9.2.11 计算二重积分 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=-2$，$y=0$ 及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

解 区域 D 和 D_1 如图 9.13 所示，有

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{D+D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y=4.$$

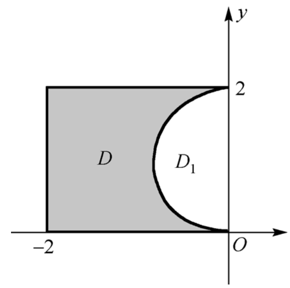


图 9.13

在极坐标系下，有 $D_1=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta,\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi\right\}$，因此

$$\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r\sin\theta r\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{12}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[1-2\cos2\theta+\frac{1+\cos4\theta}{2}\right]\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2},$$

于是 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4-\dfrac{\pi}{2}$.

9.2.4 题型四、利用直角坐标系计算三重积分

例 9.2.12 计算 $\iiint\limits_\Omega \dfrac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}v$，其中 Ω 为由六个顶点 $A(1,0,0)$、$B(1,1,0)$、$C(1,1,2)$、$D(2,0,0)$、$E(2,2,0)$、$F(2,2,4)$ 构成的棱台.

解 $$\iiint\limits_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}v=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\int_0^{2y}\mathrm{d}z=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^x\frac{2y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

$$=\int_1^2[\ln(2x^2)-\ln(x^2)]\mathrm{d}x=\ln2.$$

例 9.2.13 设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega(2x+1)\mathrm{d}v$.

解 $$I=\iiint\limits_\Omega(2x+1)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-2x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-\frac{y}{2}}(2x+1)\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-2x}\left(2x^2+x-xy-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

9.2.5 题型五、利用柱面坐标计算三重积分

例 9.2.14 求由抛物柱面 $z=4-x^2$，平面 $y=6$ 及三个坐标面所围成的立体在第一卦限上的体积 V.

解 所求立体可以看成是一个曲顶柱体，它的曲顶为 $z=4-x^2$，底为 $D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant2\\0\leqslant y\leqslant6\end{cases}$. 于是

$$V=\iint_D(4-x^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^6(4-x^2)\mathrm{d}y=\int_0^2\Big[(4-x^2)y\Big]\Big|_0^6\mathrm{d}x=6\int_0^2(4-x^2)\mathrm{d}x=32.$$

例 9.2.15 计算 $I=\iiint_\Omega xy^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=1$ 及 $z=0$ 所围成的闭区域.

解 积分区域用不等式组表示为 Ω：$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ x\leqslant y\leqslant 1\\ 0\leqslant z\leqslant xy\end{cases}$，则

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy^2z^3\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\int_0^1x^5\mathrm{d}x\int_x^1y^6\mathrm{d}y=\frac{1}{28}\int_0^1(x^5-x^{12})\mathrm{d}x=\frac{1}{312}.$$

9.2.6 题型六、利用球面坐标计算三重积分

例 9.2.16 计算 $\iiint_\Omega \mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}v,\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

解 因为被积函数仅为 z 的函数，截面 $D(z)$ 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 1-z^2$，故采用“先二后一”法，得

$$\iiint_\Omega \mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}v=2\iiint_{\Omega上}\mathrm{e}^z\mathrm{d}v=2\int_0^1\pi(1-z^2)\mathrm{e}^z\mathrm{d}z=2\pi.$$

例 9.2.17 计算 $\iiint_\Omega(x+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的.

解 因为 Ω 关于面 yOz 对称，$f(x,y,z)=x$ 为 x 的奇函数，有 $\iiint_\Omega x\mathrm{d}v=0$，所以

$$\iiint_\Omega(x+z)\,\mathrm{d}v=\iiint_\Omega z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\phi\int_0^1 r\cos\phi\cdot r^2\sin\phi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}.$$

9.2.7 题型七、重积分的应用

例 9.2.18 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所截下的有限部分的面积.

解 抛物面与平面的交线为 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ z=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$. 曲面在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$，而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y.$$

故曲面的面积为

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}r\mathrm{d}r=2\pi\frac{1}{8}\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}(1+4r^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

例 9.2.19　求由圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 1$ 所围立体的质心（设密度 $\mu(x,y) = 1$）.

解　因为该立体是均匀的，且关于坐标面 xOz、yOz 对称，所以质心位于 z 轴上，故 $\overline{x} = 0$，$\overline{y} = 0$．只需计算 $\overline{z} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v}$．而

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_r^1 \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r(1-r)\mathrm{d}r = 2\pi\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right)\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{3},$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_r^1 z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r(1-r^2)\,\mathrm{d}r = \pi\left(\frac{r^2}{2} \frac{r^4}{4}\right)\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

所以 $\overline{z} = \dfrac{3}{4}$，质心为 $\left(0, 0, \dfrac{3}{4}\right)$.

9.3　深 化 训 练

9.3.1　填空题

（1）将三次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^y f(x,y,z)\mathrm{d}z$ 变换积分次序为 $x \to y \to z$，得到________.

（2）设 Ω 为抛物柱面 $y = \sqrt{x}$ 及平面 $y = 0,\ z = 0,\ x + z = \dfrac{\pi}{2}$ 所围成的区域，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$________.

（3）设 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x = 5$ 所围成的闭区域，则 $\iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\mathrm{d}v =$________.

（4）平面 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所截出的有限部分的面积为________.

（5）曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 和 $z = 3 - 2x^2 - y^2$ 所围成的立体的体积为________.

（6）设 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$，根据二重积分的几何意义，$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$________.

（7）累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序后，得到的积分为________.

（8）已知 $D = \{(x, y) |\ |x| \leqslant 1,\ |y+1| \leqslant 1\}$，二重积分 $\iint\limits_{D} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在直角坐标系下化为累次积分为________.

（9）【2014（3）】二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} - \mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x =$________.

（10）【2008（3）】设 $D = \{(x,\ y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_{D} (x^2 - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$________.

（11）积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值等于________.

（12）设区域 D 为 $x^2+y^2 \leqslant R^2$，则 $\iint\limits_D \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

（13）【2011（2）】设平面区域 D 是由直线 $y=x$，圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成的区域，则二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=$________.

（14）【2014（3）】设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为________.

9.3.2　单项选择题

（1）曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内部的那部分面积 $S=$（　　）.

（A）$\sqrt{3}\pi$；　（B）$\sqrt{2}\pi$；　（C）$\sqrt{5}\pi$；　（D）$2\sqrt{2}\pi$.

（2）设 Ω 是锥面 $\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}(a>0,\ b>0, c>0)$ 与平面 $x=0,\ y=0,\ z=c$ 所围成的空间区域在第一卦限的部分，则 $\iiint\limits_\Omega \dfrac{xy}{\sqrt{z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}$；　（B）$\dfrac{1}{36}a^2b^2\sqrt{b}$；　（C）$\dfrac{1}{36}b^2c^2\sqrt{a}$；　（D）$\dfrac{1}{36}c\sqrt{ab}$.

（3）设 Ω 是由三个坐标面与平面 $x+2y-z=1$ 所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{48}$；　（B）$-\dfrac{1}{48}$；　（C）$\dfrac{1}{24}$；　（D）$-\dfrac{1}{24}$.

（4）设 $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $x^2+y^2=a^2$ 所围成，则 $I=$（　　）.

（A）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a a^2 r\mathrm{d}r=\pi a^4$；　（B）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2 r\mathrm{d}r=\dfrac{1}{2}\pi a^4$；

（C）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r=\dfrac{2}{3}\pi a^3$；　（D）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a a^2 a\mathrm{d}r=2\pi a^4$.

（5）设 D 为 $x^2+y^2 \leqslant a^2$，当 $a=$（　　）时，$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$.

（A）1；　（B）$\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$；　（C）$\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$；　（D）$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$.

（6）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y=$（　　）.

（A）$\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$；　（B）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}x$；

（C）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$；　（D）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

（7）若 $\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma=1$，则积分区域 D 可以是（　　）.

（A）由 x 轴，y 轴与直线 $x+y=2$ 所围成的区域；

（B）由 $x=1$，$x=2$ 及 $y=2$，$y=4$ 所围成的区域；

（C）由 $|x|=\dfrac{1}{2}$，$|y|=\dfrac{1}{2}$ 所围成的区域；

（D）由 $|x+y|=1$，$|x-y|=1$ 所围成的区域.

（8）由直线 $x+y=2,\ x=2,\ y=2$ 所围成的质量分布均匀(设面密度为 μ)的平面薄板关于 x 轴的转动惯量 $I_x=$（　　）.

（A）3μ；　（B）5μ；　（C）4μ；　（D）6μ.

（9）二重积分 $\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可表示为累次积分（　　）.

（A）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r$；　（B）$\int_0^{2\pi}r^3\mathrm{d}r\int_1^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$；

（C）$\int_{-2}^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}x^2\mathrm{d}y$；　（D）$\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x^2\mathrm{d}x$.

（10）由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=0$ 及柱面 $x^2+y^2=1$ 所围的体积是（　　）.

（A）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$；　（B）$4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$；

（C）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$；　（D）$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$.

（11）【2005（3）】设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,\ y)\big|x^2+y^2\leqslant 1\}$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$I_3>I_2>I_1$；　（B）$I_1>I_2>I_3$；

（C）$I_2>I_1>I_3$；　（D）$I_3>I_1>I_2$.

（12）【2006（1）】设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于（　　）.

（A）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；　（B）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

（C）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；　（D）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

（13）【2015（1）】设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

（A）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$；　（B）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$；

（C）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$；　（D）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

（14）【2010（2）】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　　）.

（A）$\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$；　　（B）$\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$；

（C）$\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$；　　（D）$\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

9.3.3　求 $\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}dxdy$，其中积分区域 D 是以 $(0,0)$、$(1,1)$、$(0,1)$ 为顶点的三角形.

9.3.4　证明 $\int_0^x\left[\int_0^v\left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right]dv=\dfrac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$.

9.3.5　写出积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 的极坐标二次积分形式，其中积分区域

$$D=\{(x,y)\mid 1-x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

9.3.6　证明 $\int_0^a dx\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)dy=\dfrac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)dy$.

9.3.7　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，试证:

$$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)dxdydz=\frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^3.$$

9.4　深化训练详解

9.3.1　填空题

（1）$\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_0^z f(x,y,z)dx$.　　（2）$\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}$.

（3）$\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.　　（4）$\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

（5）$V=\iint\limits_D 3(1-x^2-y^2)d\sigma=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(1-r^2)dr=\dfrac{3}{2}\pi$.

（6）$\dfrac{2}{3}\pi R^3$. **提示**　由二重积分的几何意义，$\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$ 表示球心在圆点，半径为 R 的上半球体的体积.

（7）$\int_0^1 dy\int_{y^2}^y f(x,y)dx$. **提示**　由已知的累次积分，得积分区域为 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ x\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\end{cases}$，若变换积分次序，即先积 x 后积 y，则积分变量 y 的上、下限必须是常量，而积分变量 x 的积分上、下限必须是常量或是 y 的函数，因此积分区域应表为 $\begin{cases}y^2\leqslant x\leqslant y\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$，于是交换后的积分为 $\int_0^1 dy\int_{y^2}^y f(x,y)dx$.

（8）$\int_{-1}^1 dx\int_{-2}^0 f(x,y)dy$ 或 $\int_{-2}^0 dy\int_{-1}^1 f(x,y)dx$. **提示**由已知的积分区域为 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,$

$|y+1|\leqslant 1\}$，可知区域 D 满足联立不等式组 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y+1\leqslant 1\end{cases}$，即而解得 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ -2\leqslant y\leqslant 0\end{cases}$，因为两个积分变量的上、下限都是常量，所以可随意选择积分的顺序．若先积 x 后积 y，则应填 $\int_{-2}^{0}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}f(x,y)\mathrm{d}x$；反之，应填 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-2}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y$．

（9）$\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$．**提示**　如图 9.14 所示，二次积分的积分区域为

$$D=\{(x,\ y)|0\leqslant y\leqslant 1, y\leqslant x\leqslant 1\}=\{(x,\ y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x\}.$$

$$\begin{aligned}原式&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}y-\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}(1-y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y+\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}(y^2)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).\end{aligned}$$

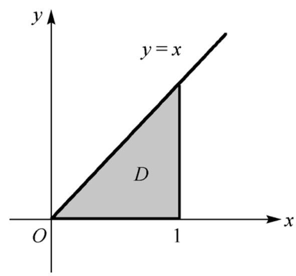


图 9.14

（10）$\frac{\pi}{4}$．**提示**

$$\begin{aligned}\iint_D(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

（11）$\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$．**提示**　由于被积函数 e^{-y^2} 的原函数不能用初等函数表示，所以应改变二次积分的积分次序，故

$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}).$$

（12）$\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$．**提示**　在极坐标系下化二重积分为二次积分：

$$\begin{aligned}\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\cdot r^3\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).\end{aligned}$$

（13）$\frac{7}{12}$．**提示**　如图 9.15 所示，在极坐标系下积分区域 D 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta,\quad \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

所以

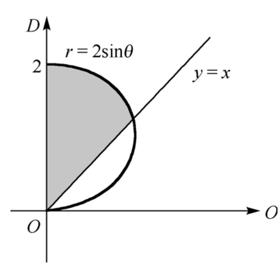


图 9.15

$$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\sin\theta\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{1}{4}(2\sin\theta)^4\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\mathrm{d}\sin\theta=\frac{7}{12}.$$

（14）$\frac{3}{2}-\ln 2$．**提示** $D=\left\{(x,\ y)\middle|1\leqslant y\leqslant 2,-y\leqslant x\leqslant -\frac{1}{y}\right\}$，则 D 的面积为

$$S=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-y}^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(-\frac{1}{y}+y\right)\mathrm{d}y=\left(-\ln y+\frac{y^2}{2}\right)_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

9.3.2　单项选择题

（1）（B）．（2）（A）．（3）（A）．（4）（B）．（5）（C）．（6）（D）．（7）（C）．（8）（C）．

（9）（A）．**提示** 因为积分区域是环域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，若选择极坐标系计算积分，令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，代入解得区域 $D=\{(r,\theta)|1\leqslant r\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，所以选型（A）正确；若选择直角坐标系计算积分，要利用积分区间的可加性，或利用区域的对称性，有

$$\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{\substack{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若先积 x 后积 y，则积分区域可表示为

$$D=\{(x,y)|\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},1\leqslant y\leqslant 2\}.$$

反之，积分区域 $D=\{(x,y)|\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2},1\leqslant x\leqslant 2\}$，所以选项（C），（D）都是错误的．

（10）（D）．**提示** 由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=0$ 及柱面 $x^2+y^2=1$ 所围的体积应是以球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 和 xOy 面所截的体积，由二重积分的几何意义知，积分区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$，被积函数为 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$．若选择极坐标系求积分，则积分区域 $D=\{(r,\theta)|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1\}$，被积函数为 $\sqrt{4-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，故体积为

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r.$$

若利用积分区域和被积函数的对称性，可以计算第一象限的二重积分，再乘 4 倍，这时积分区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1\right\}$，所求体积为 $V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$，故选项（D）正确．

（11）（A）．**提示** 在积分区域 D: $x^2+y^2\leqslant 1$ 上，有

$$(x^2+y^2)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1<\frac{\pi}{2},$$

而 $\cos x$ 在第一象限内单调减少，故

$$\cos(x^2+y^2)^2 \geqslant \cos(x^2+y^2) \geqslant \cos\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$

又因为 $\cos(x^2+y^2)^2, \cos(x^2+y^2), \cos\sqrt{x^2+y^2}$ 在 D 内均连续，且至少存在 D 内的一点，使得三个函数在该点的值两两不等，故由二重积分的性质可知

$$I_3=\iint_D \cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}\sigma > I_2=\iint_D \cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma > I_1=\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma\ .$$

（12）（C）．**提示** 本题考查坐标系变换．题中所给的积分是极坐标系下的积分，需要把其转换成直角坐标系下的积分．积分区域 D 在极坐标系下表示为：

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant 1\right\}.$$

若转换为先积 y 后积 x 的积分顺序，此时应分为两部分各自积分后求和．

1）当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，对应的积分为 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y$；

2）当 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，对应的积分为 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$．因此

$$原式=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\ .$$

若转换为先积 x 后积 y 的积分顺序，积分区域可表示为

$$D: 0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}, y\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}\ ,$$

故

$$原式=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x\ .$$

（13）（B）．**提示** 如图 9.16 所示，在极坐标系下二重积分的积分区域为

$$D=\left\{(r,\theta)\,|\,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right\},$$

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\ .$$

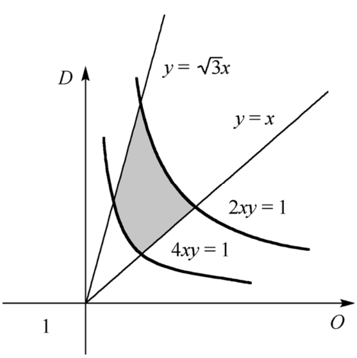


图 9.16

（14）（D）．**提示** 对题设的极限式进行恒等变换

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\right],$$

由定积分的定义可将极限转化为定积分，故

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y^2)}.$$

9.3.3　因为 $\int \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 无法用初等函数表示，所以积分时必须考虑次序.

$$\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\cdot\frac{y^3}{3}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\cdot\frac{y^2}{6}\mathrm{d}(y^2) = \frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}}\right).$$

9.3.4　因为

$$\int_0^v \mathrm{d}u\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^v\mathrm{d}t\int_t^v f(t)\,\mathrm{d}u = \int_0^v (v-t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_0^x\left[\int_0^v\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}u = \int_0^x\mathrm{d}y\int_0^v (v-t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x\mathrm{d}t\int_t^x (v-t)f(t)\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x (v-t)^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

9.3.5　利用极坐标系下圆的方程为 $r=1$，直线方程为 $r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，故

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

9.3.6　$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x (x-y)^{n\text{-}2}f(y)\mathrm{d}y = \int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b (x-y)^{n\text{-}2}f(y)\mathrm{d}x$

$$= \int_a^b f(y)\mathrm{d}y\left[\frac{1}{n-1}(x-y)^{n-1}\right]_y^b = \frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y.$$

9.3.7　**提示**　$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)$，且 $F(t)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，$F(0)=0$.

9.5　综合提高训练

例 9.5.1　计算二重积分 $I=\iint_D (x^2+xy\mathrm{e}^{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中：

（1）D 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$；

（2）D 由直线 $y=x$，$y=-1$，$x=1$ 围成.

解　（1）利用对称性.

$$I=\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}.$$

（2）添加辅助线 $y=-x$，将 D 分为 D_1、D_2，利用对称性得

$$I=\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x\int_{-1}^x\mathrm{d}y+0+0=\frac{2}{3}.$$

例 9.5.2　计算积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

解　因为 $\int\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$ 不能用初等函数表示，因此需要先改变积分次序.

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\mathrm{e}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}.$$

例 9.5.3　计算 $\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^{a+\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y$.

解　积分区域：$0\leqslant x\leqslant a$; $x\leqslant y\leqslant a+\sqrt{a^2-x^2}$；$x^2+y^2\leqslant 2ay$. 化为极坐标系 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$; $0\leqslant r\leqslant 2a\sin\theta$，因此

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^{a+\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta}\frac{1}{r\cdot\sqrt{4a^2-r^2}}r\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta}\frac{1}{2a\sqrt{1-\left(\frac{r}{2a}\right)^2}}\mathrm{d}r$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\arcsin\frac{r}{2a}\Big|_0^{2a\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{32}\pi^2.$$

例 9.5.4　求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=x$ 内部的那部分面积.

解　利用曲面的面积计算公式 $S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}\sigma$，由

$$x^2+y^2+z^2=1\Rightarrow z_x'=-\frac{x}{z};\ z_y'=-\frac{y}{z}.$$

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{1}{\sqrt{z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

积分区域（柱面的投影）：$x^2+y^2\leqslant x$. 需计算的曲面面积有二块（上、下球面）：

$$S = 2\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma = 2\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}r\mathrm{d}r = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-1)\mathrm{d}\theta$$

$$= 2(\pi-2).$$

例 9.5.5　证明 $\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}v = \pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)\mathrm{d}u$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

证　用切片法.

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}v = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D_z: x^2+y^2 \leqslant 1-z^2$，其面积为 $\pi(1-z^2)$. 故可得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} f(z)\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\int_{-1}^{1}(1-z^2)f(z)\mathrm{d}z = \pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)\mathrm{d}u.$$

例 9.5.6　设有一高度为 $h(t)$（t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程

$$z = h(t) - \frac{z(x^2+y^2)}{h(t)}$$

（设长度单位为 cm，时间单位为 h），已知体积减少的速率与侧面积成正比例（比例系数 0.9），问高度为 130（cm）的雪堆全部融化需多少时间？

解　记 V 为雪堆体积，S 为雪堆的侧面积，则（D_1：$x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{2}\left[h^2(t)-h(t)\cdot z\right]$）

$$V = \int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi\left[h^2(t)-h(t)\cdot z\right]\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}h^3(t),$$

$$S = \iint\limits_{D_2}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \left(D_2: x^2+y^2 \leqslant \frac{h^2(t)}{2}\right)$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\frac{1}{h(t)}\left[h^2(t)+16r^2\right]^{\frac{1}{2}} r\mathrm{d}r = \frac{13\pi}{12}h^2(t).$$

由题意知 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0.9S$，所以 $\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{13}{16}$，因此 $h(t) = -\frac{13}{10}t + C$，由 $h(0)=130$ 得 $h(t) = -\frac{13}{10}t+130$，令 $h(t)\to 0$，得 $t = 100(\mathrm{h})$，因此，高度为 $130\mathrm{m}$ 的雪堆全部融化所需时间为 $100\mathrm{h}$.

例 9.5.7　设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的重心的位置.

解　记所考虑的球体为 Ω，以 Ω 的球心为原点 O，射线 OP_0 为正 x 轴，建立直角坐标系，则点 P_0 的坐标为 $(R,0,0)$，球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，其体密度为

$$\mu(x,y,z) = k[(x-R)^2+y^2+z^2].$$

设Ω的重心坐标为$\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z}\right)$，由对称性$\overline{y}=0$，$\overline{z}=0$，则

$$\overline{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} xk[(x-k)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} k[(x-k)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v},$$

而

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}[(x-k)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v&=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}k^2\mathrm{d}v\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\phi\int_0^{R^2}r^2\cdot r^2\sin\phi\mathrm{d}r+\frac{4}{3}\pi R^5\\&=\frac{4}{5}\pi R^5+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}x[(x-k)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v&=-2R\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}v=-\frac{2}{3}R\iiint\limits_{\Omega}\left[x^2+y^2+z^2\right]\mathrm{d}v\\&=-\frac{2}{3}R\cdot\frac{4}{5}\pi R^5=-\frac{8}{15}\pi R^6,\end{aligned}$$

故$\overline{x}=-\dfrac{R}{4}$，因此，球体$\Omega$的重心坐标为$\left(-\dfrac{R}{4},0,0\right)$.

例 9.5.8 计算$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}v$，其中$\Omega$由曲面$x^2+y^2+z^2=R^2$及$x^2+y^2+\left(z-r\right)^2=R^2$围成.

解法 1 利用柱面坐标系，把Ω的边界曲面化为$z=\sqrt{R^2-r^2}$，$z=R-\sqrt{R^2-r^2}$，它们的交线在xOy平面上的投影方程为$\begin{cases}r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\\z=0\end{cases}$，于是

$$\begin{aligned}I&=\iiint\limits_{\Omega}z^2r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}r\mathrm{d}r\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}z^2\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}r\left[(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-(R-\sqrt{R^2-r^2})^3\right]\mathrm{d}r\\&=-\frac{2}{3}\pi\left[\frac{2}{5}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{5}{2}}+2R^3r^2-\frac{3}{4}Rr^4+R\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}=\frac{59}{480}\pi R^5.\end{aligned}$$

解法 2 利用球面坐标，把Ω的边界化为球面坐标，得：$r=R$，$r=2R\cos\phi$. 它们的交线为圆$\begin{cases}r=R\\\phi=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，则

$$I=\iiint_{\Omega} r^2\cos^2\phi\cdot r^2\sin\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\phi\sin\phi\mathrm{d}\phi\int_0^R r^4\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi\sin\phi\mathrm{d}\phi\int_0^{2R\cos\phi}r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{5}\pi R^5\left(-\frac{1}{3}\cos^3\phi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{2\pi}{5}(2R)^5\left(-\frac{1}{8}\cos^3\phi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

解法3 “先二后一”的方法，用平行于 xOy 的平面横截区域 Ω，得

$$D_z=\begin{cases}\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant R^2-(z-R)^2\} & 0\leqslant z\leqslant\dfrac{R}{2}\\ \{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant R^2-z^2\} & \dfrac{R}{2}\leqslant z\leqslant R\end{cases},$$

故

$$I=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}r+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}r\ \ I=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\pi[R^2-(z-R)^2]\mathrm{d}z+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\pi\left[\left(\frac{2R}{4}z^4-\frac{1}{5}z^5\right)\Bigg|_0^{\frac{R}{2}}+\left(\frac{R^2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5\right)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R}\right]=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

例 9.5.9 【2013（1）】设直线 L 过 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的立体为 Ω.

（Ⅰ）求曲面 Σ 的方程；　　（Ⅱ）求 Ω 的形心坐标.

解 （Ⅰ）直线 L 的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$，参数方程为

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=-t\\ z=-t\end{cases}\quad（t\text{ 为参数}）.$$

设 (x,y,z) 为曲面 Σ 上的任一点，则

$$\begin{cases}x^2+y^2=(1+t)^2+t^2\\ z=-t\end{cases}.$$

消去参数 t，得曲面 Σ 的方程为

$$x^2+y^2=2z^2-2z+1.$$

（Ⅱ）$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1,\ 0\leqslant z\leqslant 2\}$；记 Ω 的形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v},\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}.$$

由对称性，所以 $\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$.

记 $D_z=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1$，“先二后一”计算三重积分，则

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2 z(2z^2-2z+1)\mathrm{d}z=\frac{14}{3}\pi,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)\mathrm{d}z=\frac{10}{3}\pi,$$

所以 $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\dfrac{7}{5}$．因此 Ω 的形心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$．

例 9.5.10　【2017（1）】设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任意一点处的密度为 $\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，记圆锥面与柱面的交线为 C．

（I）求 C 在平面 xOy 上的投影曲线的方程；

（II）求 S 的质量 M．

解　（I）由方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z^2=2x$ 消去变量 z，得 $x^2+y^2=2x$，整理有 $(x-1)^2+y^2=1$．从而 C 在平面 xOy 上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}.$$

（II）由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，得

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{2}.$$

因此

$$\begin{aligned}M&=\iint\limits_{\Sigma}\mu(x,y,z)\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{\Sigma}9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}9\sqrt{x^2+y^2+x^2+y^2}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=18\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r\\&=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=96\times\frac{2}{3}=64.\end{aligned}$$

第 10 章　曲线积分与曲面积分

10.1　知 识 要 点

10.1.1　第一类曲线积分的概念及计算

1．曲线的弧长

设曲线的参数方程为

$$x=\phi(t)、y=\psi(t)、z=\omega(t)，\quad t\in[\alpha,\beta]，$$

$\phi(t)$、$\psi(t)$、$\omega(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上导数连续，且 $\phi'(t)$、$\psi'(t)$、$\omega'(t)$ 不同时为零，则曲线的弧长为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t .$$

2．第一类曲线积分的定义

设 L 为 xOy 面内的一条光滑曲线弧，函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界，在 L 上任意插入若干个分点把 L 分成 n 个小段：

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \cdots,\Delta s_n，$$

并用 Δs_i 表示第 i 个小段的长度，$i=1,\ 2,\ \cdots,n$．令 $\lambda=\max\{\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \cdots,\Delta s_n\}$．任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,n$，作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$．如果不论对曲线弧 L 怎样划分，也不论在小段 Δs_i 上点 (ξ_i,η_i) 如何选取，只要当 $\lambda\to 0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$ 的极限总存在且都相等，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在 L 上**对弧长的曲线积分**或**第一类曲线积分**，记为 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$．即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i .$$

曲线积分的定义也可推广到三维空间的曲线：

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i .$$

3．第一类曲线积分的几何意义

对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 可以视为以 $f(x,y)$ 为线密度的曲线形构件 L 的质量 M，也可以看作一个柱面的面积，这个柱面以 L 为准线，以平行于 z 轴的直线为母线，且在 (x,y) 处母线高度为 $f(x,y)$．

4．第一类曲线积分的计算方法

设 L_{AB} 为平面中的连续曲线，参数方程为 $x=\phi(t)$， $y=\psi(t)$，其中 $t\in[\alpha,\beta]$， $\phi(t)$、$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上导数连续，函数 $f(x,y)$ 在弧 L_{AB} 上连续，则

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t),\psi(t))\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t .$$

特别地，若曲线 L_{AB} 由方程 $y=\phi(x)$ （ $x\in[a,b]$ ）给出，则

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{a}^{b} f(x,\phi(x))\sqrt{1+\phi'^2(x)}\mathrm{d}x .$$

空间中的曲线积分计算方法类似：

设 L_{AB} 为空间中的连续曲线，参数方程为 $x=\phi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$，其中 $t\in[\alpha,\beta]$，$\phi(t)$、$\psi(t)$、$\omega(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上导数连续，函数 $f(x,y,z)$ 在弧 L_{AB} 上连续，则

$$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t .$$

注　相应于定积分与重积分，第一类曲线积分也有奇偶函数在对称曲线上的化简公式. 如曲线 L_{AB} 上的点关于 $x=0$ 对称， $f(x)$ 在 L_{AB} 上可积， L_1 为曲线 L_{AB} 上 $x\geqslant 0$ 部分的曲线，则有

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s & f(-x,y)=f(x,y)\\ 0 & f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases} .$$

类似地，可得曲线关于 $y=0$ 对称的相应结果.

10.1.2　第二类曲线积分的概念及计算

1．第二类曲线积分的定义

设 L 为 xOy 面内的一条有向光滑曲线弧，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上有界，在 L 上沿 L 的方向任意插入若干点列

$$M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2),\cdots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1}),$$

把 L 分成 n 个小弧段 $(i=1,2,\cdots,n;M_0=A,M_n=B)$， 设 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$， $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$ 在弧上任取点 (ξ_i,η_i)， $i=1,\ 2,\ \cdots,n$． 如果不论对曲线弧 L 怎样划分，也不论点 (ξ_i,η_i) 怎样选取，只要当弧段长度的最大值 $\lambda\to 0$ 时， $\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 的极限总存在且都相等，则称此极限为函数 $P(x,y)$ 在有向弧 L 上**对坐标 x 的曲线积分**或**第二类曲线积分**，记为 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$． 即

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i .$$

类似地，函数 $Q(x,y)$ 在有向弧 L 上对坐标 y 的曲线积分 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$，即

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i .$$

应用时常将函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在有向弧上从点 A 到 B 沿弧 L 的第二类曲线积分记为 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，即有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y .$$

第二类曲线积分的定义可推广到三维空间的曲线：

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z .\end{aligned}$$

2．对坐标的曲线积分的物理意义

对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 可以视为质点在变力 $F\ (x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 作用下沿着曲线 L 从起点到终点移动过程中变力所作的功 W．即

$$W=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y .$$

3．第二类曲线积分的计算方法

设 L_{AB} 为连续曲线，参数方程为

$$x=\phi(t)，\quad y=\psi(t)，\quad t\in[\alpha,\beta]，$$

当 t 由 α 变到 β 时，曲线上对应的点由 A 变到 B，$\phi(t)$、$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上导数连续，函数 $f(x,y)$ 在弧 L_{AB} 上连续，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\left[P(\phi(t),\psi(t))\phi'(t)+Q(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]\mathrm{d}t .$$

4．两类曲线积分之间的联系

设 $\alpha(x,y)$、$\beta(x,y)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y) 处的切向量的方向角，两类曲线积分之间有联系如下：

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s$$

或者

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s .$$

10.1.3　格林公式及其应用

1．格林公式

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y，$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

注 （1）如果 L 不是封闭曲线，则计算 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 时，可以适当添加上一曲线 γ，使得 $L+\gamma$ 构成封闭曲线（不妨设其为正向），则可如下那样应用格林公式计算 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$：

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L+\gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_\gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$ （其中 D 由曲线 $L+\gamma$ 围成的闭区域）.

（2）当 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 在闭区域 D 的内部有不连续点 (x_0,y_0) 时，则计算 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$（$L$ 是 D 的正向边界）时，可以作一位于 D 内部的、包围 (x_0,y_0) 的封闭曲线 C（方向为负向），于是

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L+C}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

其中 D_0 是由曲线 $L+C$ 围成的闭区域.

2．平面上曲线积分与路径无关的条件

设开区域 G 是一个单连通区域，函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则下列四条件等价：

（1）$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关；

（2）对于 G 内任意闭曲线 C，有 $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$；

（3）$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 G 内恒成立；

（4）存在 $u(x,y)$，使 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，此时

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)\mathrm{d}t+c,$$

或

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)\mathrm{d}t+c,$$

其中 (x_0,y_0) 为 G 内一个定点，c 为任意常数.

10.1.4　第一类曲面积分的概念与计算

1．第一类曲面积分的概念

设函数 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上有界. 把 Σ 任意分成 n 个小块 $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$，并用 ΔS_i 表示第 i 个小块的面积，$i=1,2,\cdots,n$. 任取 $(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)\in\Delta S_i$，$i=1,2,\cdots,n$，作和式

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)\Delta s_i$．如果不论对曲面 Σ 怎样划分，也不论在小块 ΔS_i 上点 (ξ_i,η_i,γ_i) 怎样选取，只要当各个小块曲面的直径（曲面的直径是指曲面上任意两点间距离的最大者）的最大值 $\lambda\to 0$ 时，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)\Delta S_i$ 的极限存在且都相等，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上对**面积的曲面积分**或**第一类曲面积分**，记为 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$．即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)\Delta S_i .$$

2．第一类曲面积分的计算方法

设曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，$z(x,y)$ 在 D_{xy} 上有连续的导数，$f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

若曲面 Σ 的方程为 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$，也可以有相应于上式的计算公式.

注　类似于重积分的计算，第一类曲面积分也有奇偶函数在对称曲面上的化简公式．如曲面 Σ 上的点关于平面 $x=0$ 对称，$f(x,y,z)$ 在 Σ 上可积，Σ_1 为 Σ 的 $x\geqslant 0$ 部分的曲面，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S & f(-x,y,z)=f(x,y,z)\\ 0 & f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\end{cases}.$$

类似地，可得曲面关于平面 $y=0$ 及 $z=0$ 对称的相应结果.

10.1.5　第二类曲面积分的概念与计算

1．第二类曲面积分的定义

设 Σ 为光滑的有向曲面，函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上有界.把 Σ 任意分成 n 块小曲面 $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$，并用 ΔS_i 表示第 i 个小曲面的面积，$i=1,2,\cdots,n$．ΔS_i 在 xOy 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$，任取 $(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)\in\Delta S_i$，$i=1,2,\cdots,n$，如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda\to 0$ 时，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

总存在且都相等，则称此极限为函数 $R(x,y,z)$ 在有向光滑曲面 Σ 上**对坐标 x,y 的曲面积分**，或**第二类曲面积分**，记作 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} .$$

其中 $R(x,y,z)$ 叫做**被积函数**，Σ 叫做**积分曲面**.

类似有函数 $P(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对坐标 y、z 的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz},$$

以及函数 $Q(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对坐标 z、x 的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}.$$

在实际应用时，常将函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上沿 Σ 指定侧的第二类曲面积分记为 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

2．第二类曲面积分的计算方法

曲面 Σ 是由方程 $z=z(x,y)$ 给出的有向曲面，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，函数 $z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，被积函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 连续，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中正号表示曲面取上侧，负号表示取下侧．类似有

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}} R(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中正号表示曲面取前侧，负号表示取后侧.

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint\limits_{D_{zx}} R(x,y(z,x),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

其中正号表示曲面取右侧，负号表示取左侧.

注　第二类曲面积分在计算时常采用如下同一投影法：

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\pm\iint\limits_{D_{xy}}\left[P(x,y,z(x,y))(-z_x')+Q(x,y,z(x,y))(-z_y')+R(x,y,z(x,y))\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\pm\iint\limits_{D_{yz}}\left[P(x(y,z),y,z)+Q(x(y,z),y,z)(-x_y')+R(x(y,z),y,z)(-x_z')\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\pm\iint\limits_{D_{zx}}\left[P(x,y(z,x),z)(-y_x')+Q(x,y(z,x),z)+R(x,y(z,x),z)(-y_z')\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

3．两类曲面积分之间的联系

设 $\alpha(x,y,z)$、$\beta(x,y,z)$、$\gamma(x,y,z)$ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向角，则两类曲面积分之间有联系如下：

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S\ .$$

10.1.6　高斯公式与斯托克斯公式

1．高斯公式

设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 围成，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有高斯公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v = \oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

或

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v = \oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S\ ,$$

其中 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

2．曲面积分与曲面无关的条件

设 Ω 是空间单连通区域，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 Ω 上可微，曲面 $\Sigma\subset\Omega$，则下列三条件等价：

（1）$\iint_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在 Ω 内与曲面无关，Σ_1 是 Ω 内与 Σ 具有相同边界曲线的任意曲面，其侧满足右手准则；

（2）对于 Ω 内任意闭曲面 Σ_2，有 $\oiint_{\Sigma_2} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$；

（3）$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$ 在 Ω 内恒成立.

3．斯托克斯公式

设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手法则，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在包含曲面 Σ 在内的一个空间区域具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\ .$$

4．空间曲线积分与路径无关的条件

设空间区域 G 是一维单连通区域，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 G 上可微，则下列四条件等价：

（1）对于 G 内任意曲线 Γ，$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 与路径无关；

（2）对于 G 内任意封闭曲线 Γ，有 $\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$；

（3）$\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial z}$，$\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 Ω 内恒成立；

（4）存在 $u(x,y,z)$，使 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$，且

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0,z_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x,t,z_0)\mathrm{d}t+\int_{z_0}^{z}R(x,y,t)\mathrm{d}t+c,$$

或

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(t,y,z)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t,z)\mathrm{d}t+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,t)\mathrm{d}t+c,$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为 G 内一个定点，$(x,y,z)\in G$，c 为任意常数.

注　积分时的路径可以选取从点 (x_0,y_0,z_0) 出发，沿以点 (x_0,y_0,z_0) 和点 (x,y,z) 为相对顶点的长方体的棱，到达点 (x,y,z) 的任一路径.

10.2　典型例题分析

10.2.1　题型一、求解第一类曲线积分

例 10.2.1　用不同方法计算曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}s$，其中 L 是圆 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限的部分.

解法 1　取 L 的参数方程为 $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ $\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\int_L xy\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t}\,\mathrm{d}t=a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\mathrm{d}t=\frac{a^3}{2}.$$

解法 2　取 L 的方程为 $y=\sqrt{a^2-x^2}$　$(0\leqslant x\leqslant a)$，则

$$\int_L xy\mathrm{d}s=\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=a\int_0^a x\mathrm{d}x=\frac{a^3}{2}.$$

解法 3　取 L 的方程为 $x=\sqrt{a^2-y^2}$　$(0\leqslant y\leqslant a)$，则

$$\int_L xy\mathrm{d}s=\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\cdot y\cdot\sqrt{1+\frac{y^2}{a^2-y^2}}\mathrm{d}y=a\int_0^a y\mathrm{d}y=\frac{a^3}{2}.$$

例 10.2.2　计算 $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 是由圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$，x 轴在第一象限中所围图形的边界.

解　如图 10.1 所示，

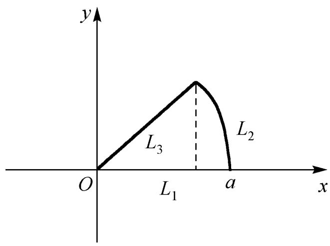


图 10.1

$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_{L_1}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_2}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_3}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds .$$

其中：

L_1：$y=0$，$ds=dx$，$0\leqslant x\leqslant a$，

$$\int_{L_1}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^x dx=e^a-1；$$

L_2：$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，$ds=adx$，

$$\int_{L_2}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a a dx=\frac{\pi a e^a}{4}；$$

L_3：$y=x$，$ds=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{2}dx$，$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}x$，$0\leqslant x\leqslant\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，

$$\int_{L_3}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}dx=e^a-1；$$

从而

$$\begin{aligned}\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds&=\int_{L_1}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_2}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_3}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds\\&=e^a-1+\frac{\pi a e^a}{4}+e^a-1=\left(2+\frac{\pi}{4}a\right)e^a-2 .\end{aligned}$$

例 10.2.3　【1998（1）】设 l 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，计算 $\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)ds$.

解　由于 l 是关于 y 轴对称的，且 $2xy$ 是关于变量 x 的奇函数，所以 $\oint_l 2xyds=0$.

又因为在 l 上有 $3x^2+4y^2=12$，所以

$$\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)ds=\oint_l 2xyds+\oint_l(3x^2+4y^2)ds=0+\oint_l 12ds=12a .$$

注　一般地，若曲线 L 关于 y 轴对称，则有

$$\int_L f(x,y)\,ds=\begin{cases}2\int_{L_1}f(x,y)ds & f(-x,y)=f(x,y)\\0 & f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases},$$

其中 L_1 是 L 在 $x\geqslant 0$ 的部分.

若曲线 L 关于 x 轴对称，则有

$$\int_L f(x,y)\,ds=\begin{cases}2\int_{L_1}f(x,y)ds & f(x,-y)=f(x,y)\\0 & f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases},$$

其中 L_1 是 L 在 $y\geqslant 0$ 的部分.

例 10.2.4　计算 $\int_L x^2ds$，其中 L 是由 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 所表示的圆的一周.

解法 1　先找曲线 L 的一个参数方程. 由 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$，消去 z，得

$$x^2+xy+y^2=\frac{a^2}{2},$$

或

$$\frac{3x^2}{4}+\left(y+\frac{x}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}.$$

令 $\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}a\cos t \\ y+\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a\sin t \end{cases}$，则 $\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}a\cos t \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a\sin t-\dfrac{1}{\sqrt{6}}a\cos t \end{cases}$. 则

$$x_t'=-\sqrt{\frac{2}{3}}a\sin t,\quad y_t'=\frac{1}{\sqrt{2}}a\cos t+\frac{1}{\sqrt{6}}a\sin t,\quad z_t'=-x_t'-y_t',$$

从而

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,\mathrm{d}t=a\mathrm{d}t.$$

所以

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\frac{2a^2}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{3}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

解法 2　由于变量 x、y、z 的地位是一样的，所以

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s.$$

从而

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\int_L\mathrm{d}s=\frac{2\pi a^2}{3}.$$

10.2.2　题型二、求解第二类曲线积分

例 10.2.5　计算 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为曲线 $y=1-|1-x|$ 从对应于 $x=0$ 到 $x=2$ 的点.

解　如图 10.2 所示，

$$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{L_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{L_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y.$$

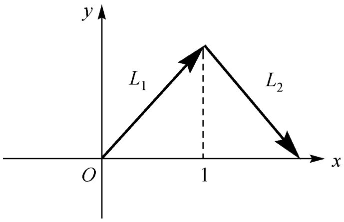


图 10.2

L_1：$y=x$，

$$\int_{L_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

L_2： $y=2-x$， $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}y$，

$$\int_{L_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=-2\int_1^0 y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}.$$

从而 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\dfrac{4}{3}$.

例 10.2.6　设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在曲线 L 上连续，l 为 L 的长度，

$$M=\max_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)},$$

（1）证明　$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant Ml$.

（2）利用（1）估计积分

$$I_R=\oint_{C_R}\frac{(y-1)\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^2},$$

其中 C_R 为圆周 $(x+1)^2+(y-1)^2=R^2$ 的正向，并求 $\lim\limits_{R\to+\infty}|I_R|$.

解　（1）由两类曲线积分之间的关系：

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s,$$

其中 $\alpha(x,y)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y) 处的切向量的方向角．由曲线积分的性质得

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|=\left|\int_L(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_L|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\mathrm{d}s.$$

而由 Schwarz 不等式有

$$|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|=|(P,Q)(\cos\alpha,\sin\alpha)|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\leqslant M,$$

所以

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant M\int_L\mathrm{d}s=Ml.$$

（2）由已知有

$$P=\frac{y-1}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^2},\quad Q=\frac{x+1}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^2},$$

所以 $P^2+Q^2=\dfrac{1}{R^6}$，此为常数．从而 $M=\dfrac{1}{R^3}$．而

$$|I_R|=\left|\oint_{C_R}\frac{(y-1)\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^2}\right|\leqslant\frac{1}{R^3}2\pi R=\frac{2\pi}{R^2}.$$

进而 $\lim\limits_{R\to+\infty}|I_R|\leqslant\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{2\pi}{R^2}=0$．所以 $\lim\limits_{R\to+\infty}|I_R|=0$.

例 10.2.7　**【1991（1）】**在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x$（$a>0$）中，求一条

曲线 L，使沿该曲线从 $O(0,0)$ 到 $A(\pi,0)$ 的积分 $I(a)=\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

解　由题意

$$\begin{aligned}I(a)&=\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\pi}[1+a^3\sin^3x+(2x+a\sin x)a\cos x]\mathrm{d}x\\&=\pi-4a+\frac{4}{3}a^3.\end{aligned}$$

而 $I'(a)=-4+4a^2$. 令 $I'(a)=0$，得 $a=1$， $a=-1$（舍去），且 $a=1$ 是 $I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的唯一驻点. 又因为 $I''(a)=8a$， $I''(1)=8>0$. 所以， $I(a)$ 在 $a=1$ 处取得最小值. 因此所求曲线为 $y=\sin x$ （$0\leqslant x\leqslant 2\pi$ ）.

10.2.3　题型三、格林公式的应用

例 10.2.8　计算 $\oint_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，沿逆时针方向.

解　该区域为不含奇点的封闭曲线，考虑格林公式.

$$\begin{aligned}\oint_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi a^4.\end{aligned}$$

例 10.2.9　计算 $\int_L(x\sin 2y-y)\mathrm{d}x+(x^2\cos 2y-1)\mathrm{d}y$，其中 L 为圆 $x^2+y^2=1$ 上从点 $A(1,0)$ 依逆时针方向到点 $B(0,1)$ 的一段弧.

解　该区域为非封闭曲线，不能直接利用格林公式. 先考虑封闭曲线，令 $L^*=L+\overline{BO}+\overline{OA}$，则

$$P=x\sin 2y-y,\quad Q=x^2\cos 2y-1.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x\cos 2y-1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x\cos 2y.$$

由格林公式，有

$$\begin{aligned}\oint_{L^*}(x\sin 2y-y)\mathrm{d}x+(x^2\cos 2y-1)\mathrm{d}y&=\iint_D[2x\cos 2y-(2x\cos 2y-1)]\mathrm{d}\sigma\\&=\iint_D\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

注意到 $\overline{BO}$： $x=0$， $\overline{OA}$： $y=0$，

$$\int_{\overline{BO}}(x\sin 2y-y)\mathrm{d}x+(x^2\cos 2y-1)\mathrm{d}y=\int_{\overline{BO}}(-1)\mathrm{d}y=-\int_1^0\mathrm{d}y=1,$$

$$\int_{\overline{OA}}(x\sin 2y-y)\mathrm{d}x+(x^2\cos 2y-1)\mathrm{d}y=0.$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\int_L (x\sin 2y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos 2y - 1)\mathrm{d}y \\
=& \oint_{L^*} (x\sin 2y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos 2y - 1)\mathrm{d}y \\
&-\int_{\overline{BO}} (x\sin 2y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos 2y - 1)\mathrm{d}y \\
&-\int_{\overline{OA}} (x\sin 2y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos 2y - 1)\mathrm{d}y \\
=& \frac{1}{4}\pi - 1 .
\end{aligned}
$$

例 10.2.10　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其始点为 (a,b)，终点为 (c,d)．记

$$I=\int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]\mathrm{d}y ,$$

（1）证明曲线积分 I 与路径 L 无关.

（2）当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

解　（1）设 $P=\dfrac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]$，$Q=\dfrac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在上半平面内处处成立，所以在上半平面内曲线积分 I 与路径无关.

（2）**解法 1**　由于积分 I 与路径无关，所以

$$
\begin{aligned}
I=&\int_{(a,b)}^{(c,b)} \frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]\mathrm{d}y \\
&+\int_{(c,b)}^{(c,d)} \frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]\mathrm{d}y \\
=&\int_a^c \frac{1}{b}\left[1+b^2 f(bx)\right]\mathrm{d}x+\int_b^d \frac{c}{y^2}\left[y^2 f(cy)-1\right]\mathrm{d}y \\
=&\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b} \\
=&\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc} f(t)\mathrm{d}t+\int_{cb}^{cd} f(t)\mathrm{d}t \\
=&\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd} f(t)\mathrm{d}t .
\end{aligned}
$$

当 $ab=cd$ 时，$\displaystyle\int_{ab}^{cd} f(t)\,\mathrm{d}t=0$，所以 $I=\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}$.

解法 2

$$I=\int_L \frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x\mathrm{d}y}{y^2}+\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{L}f(xy)\left[y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{L}f(xy)\mathrm{d}(xy),$$

因为 $f(t)$ 连续，所以 $F(t)=\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$ 存在，且 $\mathrm{d}F(t)=f(t)\mathrm{d}t=f(xy)\mathrm{d}(xy)$，故

$$\int_{L}f(xy)\mathrm{d}(xy)=F(xy)\Big|_{(a,b)}^{(c,d)}=F(cd)-F(ab),$$

当 $ab=cd$ 时，$\int_{L}f(xy)\mathrm{d}(xy)=0$，由此得 $I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

例 10.2.11 【1995（1）】设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $I=\int_{L}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$.

解　由于曲线积分与路径无关，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(2xy)}{\partial y}$，即 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$，从而

$$Q(x,y)=x^2+C(y),$$

其中 $C(y)$ 为待定函数. 又

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1[t^2+C(y)]\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1 C(y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^t[1^2+C(y)]\mathrm{d}y=1+\int_0^t C(y)\mathrm{d}y,$$

由题设有

$$t^2+\int_0^1 C(y)\mathrm{d}y=1+\int_0^t C(y)\mathrm{d}y,$$

两边对 t 求导数，得

$$2t=1+C(t),$$

于是 $C(t)=2t-1$，从而 $C(y)=2y-1$. 因此 $Q(x,y)=x^2+2y-1$.

例 10.2.12　**【2000（1）】**计算曲线积分 $I=\oint_{L}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，2 为半径的圆周取逆时针方向.

解　L 是封闭曲线，但是由于曲线所包围的区域内含有奇点，所以不能直接使用格林公式. 因此我们添加被 L 包含的曲线 $C:\begin{cases}x=\frac{\varepsilon}{2}\cos t\\ y=\varepsilon\sin t\end{cases}$（$t\in[0,2\pi]$），$\varepsilon$ 为充分小的正常数. C 为顺时针方向，C^+ 为逆时针方向. 由已知有

$$P=\frac{-y}{4x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{4x^2+y^2},$$

从而

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad (x,y)\neq(0,0).$$

由格林公式有

$$\oint_{L+C}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=0.$$

从而

$$I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_{C^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C^+}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\varepsilon^2\mathrm{d}t=\pi.$$

例 10.2.13　设 $\mathrm{d}u=(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，求 $u(x,y)$.

解法 1　设 $P=3x^2y+8xy^2$，$Q=x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以积分与路径无关.从而

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y+C_1\\&=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y+C_1\\&=x^3y+4x^2y^2+12\mathrm{e}^y(y-1)+C\quad（C=12+C_1）.\end{aligned}$$

解法 2　由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P=3x^2y+8xy^2$，把 y 看作不变的，对 x 积分得

$$u(x,y)=x^3y+4x^2y^2+\phi(y).$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q=x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y=x^3+8x^2y+\phi'(y),$$

故有 $\phi'(y)=12y\mathrm{e}^y$，　$\phi(y)=\int 12y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=12\mathrm{e}^y(y-1)+C$，所以

$$u(x,y)=x^3y+4x^2y^2+12\mathrm{e}^y(y-1)+C.$$

10.2.4　题型四、求解第一类曲面积分

例 10.2.14　计算 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分.

解　由已知，Σ 的方程为 $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}}$，从而

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

曲面Σ在平面xOy面上的投影为

$$D:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\leqslant 1\,.$$

从而

$$\iint_{\Sigma}\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2+z^2}\,\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\iint_{D}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\pi\,.$$

例 10.2.15 计算$I=\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=2az$.

解 积分曲面是封闭曲面时要分片计算．上半球面Σ_1：$z=a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，下半球面Σ_2：$z=a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$．Σ_1在xOy坐标面上的投影为$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant a^2$，且$\mathrm{d}S=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，因此

$$\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}2a(a+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{2a^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}2a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2a^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r+2a^2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\pi a^4+2\pi a^4=6\pi a^4\,.$$

类似可得

$$\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=2\pi a^4\,.$$

所以$I=8\pi a^4$.

例 10.2.16 计算$\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$.

解 由对称性，有$\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S$．从而

$$\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{9}\pi\,.$$

例 10.2.17　计算 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

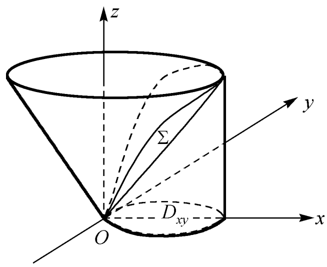


图 10.3

解法 1　如图 10.3 所示，Σ 在坐标面 xOy 上的投影区域 D_{xy} 为：$x^2+y^2\leqslant 2ax$. 因为 $\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}\sigma$，所以

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\left(xy+y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2\cos\theta\, r\mathrm{d}r$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta=8\sqrt{2}a^4\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4 .$$

解法 2　由于 Σ 关于 xOz 面对称，且被积函数 xy 及 yz 是关于 y 的奇函数，故

$$\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}S=0,\quad \iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}S=0 .$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}zx\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4 .$$

10.2.5　题型五、求解第二类曲面积分

例 10.2.18　计算 $\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解　前半球面 Σ_1：$x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$ （前侧），后半球面 Σ_2：$x=-\sqrt{R^2-y^2-z^2}$ （后侧）. 它们在 yOz 面上的投影均为 $D_{yz}:y^2+z^2\leqslant R^2\ (z\geqslant 0)$.

$$\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_2}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2-z^2}\cdot z\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{yz}}\left(-\sqrt{R^2-y^2-z^2}\right)\cdot z\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{R^2-y^2-z^2}\cdot z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=2\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\cdot r^2\mathrm{d}r$$

$$\underline{\underline{r=R\sin t}}\ 4R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t-\sin^4 t)\mathrm{d}t$$

$$=4R^4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi R^4}{4}.$$

例 10.2.19　计算$\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

解　由对称性可知$\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\oiint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中

$$\Sigma_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\quad \Sigma_2: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

Σ_1、Σ_2在xOy面上的投影为$D_{xy}: x^2+y^2\leqslant a^2(z=0)$. 用极坐标表示，则为：$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant r\leqslant a$. 因为

$$\oiint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}}(-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=-2\pi\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}(a^2-r^2)$$

$$=-2\pi\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi a^3,$$

所以

$$\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\oiint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi a^3.$$

例 10.2.20　计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(x-2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Sigma$是抛物柱面$y=\sqrt{x}$被平面$x+z=1$和$z=0$所截下的那部分的后侧曲面.

解　如图 10.4 所示，因为柱面$y=\sqrt{x}$在坐标面xOy上的投影是一条曲线，由定义知

$$\iint\limits_{\Sigma}(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

Σ在坐标面yOz上的投影区域记为$D_{yz}: 0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant 1-y^2$.

由于Σ取后侧，故

$$\iint\limits_{\Sigma}(x-2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}(y^2-2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iint\limits_{D_{yz}}(y^2-2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y^2}(y^2-2)\mathrm{d}z=-\int_0^1(y^2-2)\cdot(1-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=-\left(-2y+y^3-\frac{1}{5}y^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{6}{5}.$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(x-2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{6}{5}.$$

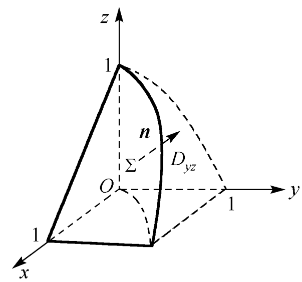


图 10.4

10.2.6　题型六、高斯公式、斯托克斯公式的应用

例 10.2.21　计算曲面积分 $I=\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是平面 $x=0$， $y=0$， $z=0$， $x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解　如图 10.5 所示，由高斯公式有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{8}.$$

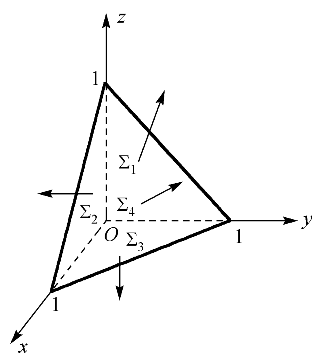


图 10.5

例 10.2.22　【1998（1）】计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

解　将 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$ 代入被积函数，有

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

设 $\Sigma_1:z=0\quad(x^2+y^2\leqslant a^2)$，取其上侧，由高斯公式得

$$I=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma-\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{a}\iint\limits_{-\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{a}\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{a}\iint\limits_{D}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Ω 为 $\Sigma-\Sigma_1$ 所包围的区域， D 为 $z=0$ 上的平面区域 $x^2+y^2\leqslant a^2$，于是

$$I=\frac{1}{a}\left[-\iiint_{\Omega}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\pi a^4+\pi a^4\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{0}2z\mathrm{d}z-\pi a^4\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[2\pi\int_0^a\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)^2 r\mathrm{d}r-\pi a^4\right]=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

例 10.2.23　计算曲面积分 $\oint\!\!\oint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，闭曲面 Σ 包含原点且分片光滑，取其外侧.

解　设 Ω 是由 Σ 所围成的空间区域，在 Ω 内以原点为中心，作球面 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=a^2$，取其外侧．$\Sigma$ 与 Σ_1 所围成的闭区域记为 Ω_1，P、Q、R 在 Ω_1 内具有一阶连续的偏导数，由 $P=\frac{x}{r^3}$，$Q=\frac{y}{r^3}$，$R=\frac{z}{r^3}$，而

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^3-x\cdot 3r^2\frac{x}{r}}{r^6}=\frac{r^2-3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3z^2}{r^5}.$$

根据高斯公式，得

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega_1}\frac{3r^2-3r^2}{r^5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

于是

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0-\oint\!\!\oint_{-\Sigma_1}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint\!\!\oint_{\Sigma_1}\frac{x}{a^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{a^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{a^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi.$$

例 10.2.24　计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

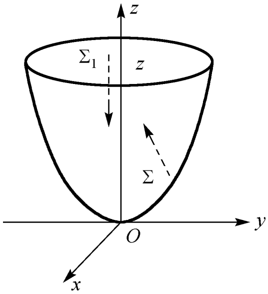


图 10.6

解　如图 10.6 所示，设 $\Sigma_1: z=1\ (x^2+y^2\leqslant 1)$ 取下侧，Σ 与 Σ_1 所包围的空间区域 $\Omega: x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$，$\Sigma_1$ 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$.

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}V=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{3}{2}\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

所以

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\frac{3}{2}\pi-(-\pi)=-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

例 10.2.25　【1997（1）】 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\oint_L(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x-y+z=2\end{cases}$ 从 z 轴的正向看去 L 的方向是顺时针的.

解　设 Σ 是平面 $x-y+z=2$ 上以 L 为边界的有限部分，其法向量与 z 轴正向的夹角为钝角，Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1$． $P=z-y$， $Q=x-z$， $R=x-y$． 则由斯托克斯公式，有

$$\begin{aligned}&\oint_L(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z\\&=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\z-y&x-z&x-y\end{vmatrix}\\&=\iint_{\Sigma}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi.\end{aligned}$$

例 10.2.26　计算 $I=\oint_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$.其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴的正向看去 L 为逆时针方向.

解　设 Σ 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧， $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\leqslant 1\}$ 为 Σ 在 xOy 面上的投影．由斯托克斯公式，得

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\y^2-z^2&2z^2-x^2&3x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

其中 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\dfrac{\sqrt3}{3},\dfrac{\sqrt3}{3},\dfrac{\sqrt3}{3}\right\}$ 为 Σ 的单位法向量.

$$I=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\iint_{\Sigma}(4x+2y+3z)\mathrm{d}S=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\iint_{\Sigma}\left[4x+2y+3(2-x-y)\right]\mathrm{d}S$$
$$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\iint_{\Sigma}(x-y+6)\mathrm{d}S=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\iint_{D}(x-y+6)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-2\iint_{D}(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

因为 D 关于两个坐标轴对称，x 和 y 分别为 x 及 y 的奇函数，所以 $\iint_{D}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint_{D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.
于是，有

$$I=-12\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24\,.$$

10.2.7　题型七、曲线、曲面积分的实际应用

例 10.2.27　设一段锥面螺线 $x=\mathrm{e}^t\cos t,\ y=\mathrm{e}^t\sin t,\ z=\mathrm{e}^t\ (t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 上任一点处的线密度与该点向径的长度成反比，且在点 $(1,0,1)$ 处的线密度等于 1，求它的质量.

解　曲线上任一点 $P=(x,y,z)$ 的向径的长度 $\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，由题意 $\rho(x,y,z)=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\rho(1,0,1)=1$，所以 $k=\sqrt{2}$，从而

$$\rho(x,y,z)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$

故

$$M=\int_L\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}s=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\mathrm{e}^{2t}}}\cdot\sqrt{3\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t=\sqrt{3}(t_2-t_1)\,.$$

例 10.2.28　求螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 对 z 轴的转动惯量，设曲线的密度为常数 μ.

解　因为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

所以

$$I_z=\int_{\Gamma}(x^2+y^2)\mu\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^2\mu\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t=2\pi\mu\, a^2\sqrt{a^2+k^2}\,.$$

例 10.2.29　求均匀曲面 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的重心坐标.

解　已知 Σ 是中心在原点、半径为 a 的上半球面．由于 Σ 关于坐标面 yOz、zOx 均对称，故有 $\bar{x}=0,\ \bar{y}=0$．设 Σ 的面密度为 ρ，Σ 的质量为 $M=2\pi\rho\, a^2$，且

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iint_{\Sigma}\rho\, z\,\mathrm{d}S\,.$$

曲面 Σ 在坐标面 xOy 上的投影 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant a^2$，则

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{M}\iint_{\Sigma} \rho\, z\mathrm{d}S = \frac{1}{2\pi\rho\, a^2}\iint_{D_{xy}} \rho\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi\rho\, a^2}\iint_{D_{xy}} \rho\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi\rho\, a^2}\iint_{D_{xy}} \rho\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi\, a^2}\iint_{D_{xy}} a\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}a .\end{aligned}$$

所以曲面 Σ 的重心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{1}{2}a\right)$.

例 10.2.30　已知流体的速度场 $v(x,y,z)=(2x-z)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$，试求单位时间流过立方体 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$ 的全表面的外侧的流量（流体的密度为 1）.

解　如图 10.7 所示，流量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{\Sigma} (2x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}(2+x^2-2xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a (2+x^2-2xz)\mathrm{d}z = \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a (2a+ax^2-a^2x)\mathrm{d}y \\ &= a\int_0^a (2a+ax^2-a^2x)\mathrm{d}x = a\left(2a^2+\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{2}\right) \\ &= a^3\left(2-\frac{a^2}{6}\right).\end{aligned}$$

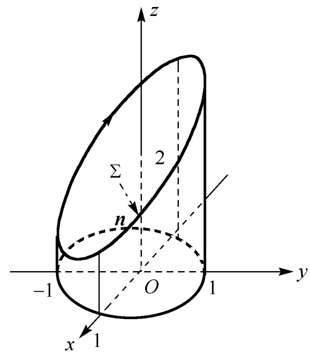


图 10.7

10.3　深 化 训 练

10.3.1　填空题

（1）设 L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $y=x$ 相交的圆周，则 $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s=$________.

（2）设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$________.

（3）设 L 为 xOy 面上直线 $x=a$ 上的一段弧，则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=$________.

（4）设 L 为由 $x=0$，$x=2$，$y=0$，$y=3$ 四条直线所围成的封闭折线，且为逆时针方向，则 $\oint_L (1+y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=$________.

（5）设 L 是抛物线 $y^2=x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧，则 $\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=$________.

（6）设 L 是任意一条分段光滑的封闭曲线，则 $\oint_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y =$ ________.

（7）若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2\right)\mathrm{d}S=$ ________.

（8）已知在力 $\vec{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的作用下，一质点沿有向曲弧段 L 的正向从一端移动到另一端所做的功为 $W=$ ________.

10.3.2　单项选择题

（1）设 S_1 表示上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$z\geqslant 0$ 的上侧，设 S_2 表示下半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$z\leqslant 0$ 的下侧．若曲面积分 $I_1=\iint\limits_{S_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_{S_2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则必有（　　）.

（A）$I_1>I_2$；　（B）$I_1<I_2$；　（C）$I_1=I_2$；　（D）$I_1+I_2=0$．

（2）设一段锥面螺线 L：$x=\mathrm{e}^t\cos t$，$y=\mathrm{e}^t\sin t$，$z=\mathrm{e}^t$　$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 上点 (x,y,z) 处的线密度为 $\mu(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，则该构件的质量为（　　）.

（A）$\sqrt{6}\pi$；　（B）π；　（C）2π；　（D）4π．

（3）设有平面力场 $\boldsymbol{F}=[(x-a)^2+y^2]\,\boldsymbol{i}$，将一质点沿曲线 L：$(x-a)^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ 从点 (a,a) 移动到点 $(2a,0)$ 所做的功 $W=1$，则 a 为（　　）.

（A）1；　（B）2；　（C）3；　（D）4.

（4）设 L 为圆域 $D:x^2+y^2\leqslant -2x$ 的正向边界，则 $\oint_L(x^3-y)\,\mathrm{d}x+(x-y^3)\mathrm{d}y=$（　　）.

（A）-2π；　（B）0；　（C）$\dfrac{3\pi}{2}$；　（D）2π．

（5）设 G 为一个单连通区域，$P(x,y)$、$Q(x,y)$ 是 G 内的二元函数，L 为 G 内任一条光滑曲线，则下列说法正确的是（　　）.

（A）设 L_1、L_2 为区域 G 内的两条曲线，若 $\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 与路径无关；

（B）若 P、Q 在 G 内一阶偏导数连续，且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关；

（C）若在 G 内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关；

（D）若 P、Q 在 G 内可微，且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关.

（6）设曲线 $L:y=x^2$，$|x|\leqslant 1$，则在 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 中被积函数 $f(x,y)$ 取（　　）时，该积分可以理解成 L 的质量.

（A）$x+y$；　（B）$x+y-2$；　（C）$x+y+2$；　（D）$x-3$．

（7）已知有向光滑曲线 $L:x=\phi(t),y=\psi(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 的始点 B 对应的参数值为 α，终点 A 对应的参数值为 β，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$\int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t),\psi(t)]\mathrm{d}t$；　（B）$\int_{\beta}^{\alpha} f[\phi(t),\psi(t)]\mathrm{d}t$；

（C）$\int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t)\mathrm{d}t$；　（D）$\int_{\beta}^{\alpha} f[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t)\mathrm{d}t$.

（8）设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0)$，$\Sigma_1$ 为 Σ 在第一卦限的部分，则有（　　）

（A）$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$；　（B）$\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$；

（C）$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$；　（D）$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$.

10.3.3　计算 $\oint_L (x^2+y^2)^3\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t,\ y=a\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

10.3.4　计算 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$.

10.3.5　计算 $\oint_L (4x^3+x^2|y|)\,\mathrm{d}s$，其中 L 为折线段 $|x|+|y|=1$ 所围成区域的整个边界.

10.3.6　计算 $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 L 是摆线

$$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$$

上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧.

10.3.7　计算 $\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中 L 是先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$，然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线.

10.3.8　设一折线型构件占有 xOy 面上曲线弧 L，L 为连接点 $A(2,0)$、$O(0,0)$ 与点 $B(0,3)$ 的折线段，且在曲线 L 上点 (x,y) 处的线密度为 $\mu(x,y)=x^3+y^3$，求该构件的质量.

10.3.9　设一质点在力 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ 的作用下，从点 $A\ (0,1,2)$ 沿直线段移动到点 $B\ (2,3,5)$，求力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 作的功 W .

10.3.10　计算 $\oint_L (x+y)^2\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $x^2+y^2=1$ 取正向.

10.3.11　计算曲线积分 $I=\int_L [\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$，其中 L 为曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 上点 $A(2a,0)$ 沿逆时针方向到点 $O(0,0)$ 的一段弧（a,b 为正常数）.

10.3.12　设 $I=\oint_L y^3\mathrm{d}x+(3x-x^3)\mathrm{d}y$，其中 C 为正向圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$，问 a 为何值时 I 最大？并求出此最大值.

10.3.13 设曲线积分 $I=\int_L [f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，求函数 $f(x)$.

10.3.14　计算 $\oint_L \mathrm{e}^{-x}(1+\cos y)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-x}(1+\sin y)\mathrm{d}y$，其中 L 为区域 $0\leqslant y\leqslant 1-x^2$ 的正向边界线.

10.3.15　计算 $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2$，$y\geqslant 0$，沿顺时针方向.

10.3.16　证明曲线积分

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$$

在整个坐标面 xOy 上与路径无关，并计算积分值.

10.3.17　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续导数，求积分

$$I=\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y\,,$$

其中 L 是从点 $A\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段.

10.3.18　计算 $\oint_L\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中 $L:(x-1)^2+y^2=2$，沿逆时针方向.

10.3.19　计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\dfrac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分.

10.3.20　计算 $\oint_\Gamma(x^2+y^2+2z)\,\mathrm{d}s$，其中 Γ 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+y+z=0\end{cases}$.

10.3.21　设有一变力 $\vec{\boldsymbol{F}}=(y^2\mathrm{e}^x+3x^2+y^2)\boldsymbol{i}+(2y\mathrm{e}^x+2xy-3y^2)\boldsymbol{j}$，这变力确定了一个力场.

（1）证明：质点在此场内移动时，场力所做的功与路径无关；

（2）求质点从点 $A(1,0)$ 移动到点 $B(0,1)$，该变力所做的功.

10.3.22　有一力场 $\boldsymbol{F}$，其力的大小与力的作用点到 xoy 平面的距离成反比且指向原点，试求单位质量的质点沿直线 $x=at$，$y=bt$，$z=ct(c\neq0)$ 从点 (a,b,c) 移动到 $(2a,2b,2c)$ 时，该场力所做的功.

10.3.23　计算下列第二类曲线积分：

（1）$\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，$L$ 为螺旋线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ 上由 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的有向弧段；

（2）$\oint_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，其中 $\boldsymbol{F}=\dfrac{y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$，$L$ 按逆时针方向绕行的圆 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$.

10.4　深化训练详解

10.3.1　填空题

（1）$2\pi a^2$.　（2）π.　（3）0.　（4）0.　（5）$\dfrac{34}{3}$.　（6）0.

（7）$\dfrac{7}{3}\pi a^4$.　（8）$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$.

10.3.2　单项选择题

（1）（C）.　（2）（A）.　（3）（A）.　（4）（D）.　（5）（B）.　（6）（C）.

（7）（C）.　（8）（C）.

10.3.3　$L:x=a\cos t,y=a\sin t,0\leqslant t\leqslant2\pi$，$\mathrm{d}s=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t=a\mathrm{d}t$，

$$\oint_L(x^2+y^2)^3\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^3a\mathrm{d}t=2\pi a^4.$$

10.3.4　解法 1　L 的参数方程为

$$x=\frac{a}{2}(1+\cos t),y=\frac{a}{2}\sin t,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=\frac{a}{2}\mathrm{d}t,$$

因此

$$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left[\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t\right]=2a^2.$$

解法 2　L 的极坐标方程为

$$r=a\cos\theta\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}\theta,$$

因此

$$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2|\cos\theta|\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2a^2.$$

10.3.5　由于曲线 L 关于 y 轴对称，而 $4x^3$ 是关于 x 的奇函数，故 $\oint_L 4x^3\mathrm{d}s=0$．又 $x^2|y|$ 是关于 x、y 都是偶函数，故

$$\oint_L x^2|y|\,\mathrm{d}s=4\int_{L_1}x^2y\mathrm{d}s=4\int_0^1 x^2(1-x)\sqrt{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

所以

$$\oint_L(4x^3+x^2|y|)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

10.3.6　根据公式，有

$$\begin{aligned}\int_L(2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\left[2a-a(1-\cos t)\right]\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\cdot a\sin t\mathrm{d}t\\&=a^2\int_0^{2\pi}\left[(1-\cos^2 t)+\sin t(t-\sin t)\right]\mathrm{d}t\\&=a^2\int_0^{2\pi}t\sin t\mathrm{d}t=a^2(-t\cos t+\sin t)\Big|_0^{2\pi}=-2\pi a^2.\end{aligned}$$

10.3.7　设点 $A(1,1)$、点 $B(1,2)$、点 $C(4,2)$ 在 $L_1=AB$ 上，$x=1$，$\mathrm{d}x=0$，$y:1\to 2$，

$$\int_{L_1}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^2(y-1)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

在 $L_2=BC$ 上，$y=2$，$\mathrm{d}y=0$，$x:1\to 4$，

$$\int_{L_2}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^4(x+2)\mathrm{d}x=\frac{27}{2}.$$

于是

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=14\,.$$

10.3.8　$L=AO+OB$，在 AO 上，$y=0$，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$，$0\leqslant x\leqslant 2$，在 OB 上，$x=0$，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}y$，$0\leqslant y\leqslant 3$，因此

$$M=\int_L (x^3+y^3)\mathrm{d}s=\int_{AO}(x^3+y^3)\mathrm{d}s+\int_{OB}(x^3+y^3)\mathrm{d}s=\int_0^2 x^3\mathrm{d}x+\int_0^3 y^3\mathrm{d}y=\frac{97}{4}\,.$$

10.3.9　力 $\boldsymbol{F}$ 做的功 $W=\int_{\overline{AB}} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，直线 AB 的方程为

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}\,,$$

化为参数方程为

$$x=2t,y=1+2t,z=2+3t,\quad t:0\to 1\,.$$

于是

$$W=\int_0^1[(1+2t)2+(2+3t)2+2t\cdot 3]\mathrm{d}t=\int_0^1(16t+6)\mathrm{d}t=14\,.$$

10.3.10　令 $P=(x+y)^2$，$Q=x^2+y^2$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2(x+y)$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$．于是由格林公式得

$$\begin{aligned}\oint_L (x+y)^2\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y&=\iint_D[2x-2(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D[2x-2(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 2\rho^2\mathrm{d}\rho=0\,.\end{aligned}$$

10.3.11　令 $P=\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)$，$Q=\mathrm{e}^x\cos y-ax$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y-b$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y-a$．补直线段 OA，由格林公式得

$$\oint_{L+OA}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y\,,$$

$$\iint_D(b-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi a^2}{2}(b-a)\,.$$

而 $OA:y=0,x:0\to 2a$，所以

$$\int_{OA}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y=\int_0^{2a}(-bx)\,\mathrm{d}x=-2a^2b\,.$$

因此 $I=\dfrac{\pi a^2}{2}(b-a)+2a^2b$．

10.3.12　由格林公式得

$$I=\iint_D(3-3x^2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(3-3\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left(\frac{3}{2}\rho^2-\frac{3}{4}\rho^4\right)\Big|_0^a=2\pi\left(\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{4}a^4\right)\quad（a>0）.$$

令 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a}=2\pi\left(3a-3a^3\right)$，得驻点 $a=1$．$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}^2a}=6\pi-18\pi a^2$，$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}^2a}\Big|_{a=1}=-12\pi<0$，所以 $a=1$ 是唯一的极大值点，从而是最大值点，最大值为 $I(1)=\frac{3\pi}{2}$.

10.3.13　$P=[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y$，$Q=-f(x)\cos y$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=[f(x)-\mathrm{e}^x]\cos y\text{，}\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=-f'(x)\cos y\,.$$

由已知有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^x$．这是一阶线性微分方程，从而

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C\right),$$

由于 $f(0)=0$，故 $C=-\frac{1}{2}$．所以

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

10.3.14　该区域为不含奇点的封闭曲线，考虑格林公式.

$$P=\mathrm{e}^{-x}(1+\cos y)\text{，}\quad Q=\mathrm{e}^{-x}(1+\sin y)\text{，且}\ \frac{\partial P}{\partial y}=-\mathrm{e}^{-x}\sin y\text{，}\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}(1+\sin y)\,.$$

由格林公式，有

$$\begin{aligned}\oint_L\mathrm{e}^{-x}(1+\cos y)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-x}(1+\sin y)\mathrm{d}y&=\iint_D[-\mathrm{e}^{-x}(1+\sin y)-(-\mathrm{e}^{-x}\sin y)]\mathrm{d}\sigma\\&=-\iint_D\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\sigma=-\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\&=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-1}^{1}+2\int_{-1}^{1}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\&=-(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})\\&=-(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-1}^{1}-2x\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-1}^{1}+2\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-1}^{1}=-4\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

10.3.15　由格林公式

$$\oint_{L+\overline{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{m}{2}\pi a^2.$$

又

$$\int_{\overline{OA}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=0\,,$$

所以

$$\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - m)\mathrm{d}y = -\frac{m}{2}\pi a^2 .$$

10.3.16　解法 1　因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以曲线积分与路径无关．因此

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)\mathrm{d}x + (6x^2 y - 3xy^2)\mathrm{d}y = \int_{\overline{AB}} (6xy^2 - y^3)\mathrm{d}x + \int_{\overline{BC}} (6x^2 y - 3xy^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^3 (6x\cdot 2^2 - 2^3)\mathrm{d}x + \int_2^4 (6\cdot 3^2\cdot y - 3\cdot 3\cdot y^2)\mathrm{d}y$$

$$= 80 + 156 = 236.$$

解法 2　由于被积表达式

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = (6xy^2\mathrm{d}x + 6x^2 y\mathrm{d}y) - (y^3\mathrm{d}x + 3xy^2\mathrm{d}y)$$

$$= \mathrm{d}(3x^2y^2) - \mathrm{d}(xy^3) = \mathrm{d}(3x^2y^2 - xy^3),$$

所以曲线积分与路径无关．设 $u(x,y) = 3x^2y^2 - xy^3$，则

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)\mathrm{d}x + (6x^2 y - 3xy^2)\mathrm{d}y = (3x^2y^2 - xy^3)\Big|_{(1,2)}^{(3,4)} = 236 .$$

10.3.17　$P = \dfrac{1 + y^2 f(xy)}{y}$，$Q = \dfrac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]$．而

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = f(xy) + xyf'(xy) - \frac{1}{y^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

所以在上半平面上积分与路径无关，因此

$$I = \int_3^1 \frac{3}{2}\left[1 + \frac{4}{9} f\left(\frac{2}{3}x\right)\right]\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{y^2}[y^2 f(y) - 1]\mathrm{d}y ,$$

上式中换元，令 $u = \dfrac{2}{3}x$，则

$$I = -3 + \int_2^{\frac{2}{3}} f(u)\mathrm{d}u + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y)\mathrm{d}y - 1 = -4 .$$

10.3.18　适当选取 $r > 0$，作圆周 $L_1 : x = r\cos t,\ y = r\sin t$，使 L_1 包含在 L 的内部，并取 L_1 的方向为顺时针．L, L_1 包围区域 D，由格林公式

$$\oint_{L+L_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 ,$$

所以

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oint_{L_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$$

$$=-\frac{1}{2}\oint_{L_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)}=-\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}(-\sin^2 t-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=-\pi.$$

10.3.19　设

$$\sum: z=4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right),\quad \left(x\geqslant 0, y\geqslant 0, \frac{x}{2}+\frac{y}{3}\leqslant 1\right),$$

$\sum$ 在坐标面 xOy 上的投影区域 D_{xy} 为：$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$．由于

$$\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}=\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{61}}{3},$$

$$z+2x+\frac{4}{3}y=4\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)=4 \qquad ((x,y,z)\in\sum),$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\sqrt{61}.$$

10.3.20　**解法 1**　由于 Γ 是平面 $x+y+z=0$ 上过球 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的中心的大圆．两个曲面方程联立消去 z，得

$$x^2+xy+y^2=\frac{R^2}{2},\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2=\frac{R^2}{2}. \qquad ①$$

在①式中,令

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t, x=\sqrt{\frac{2}{3}}R\cos t, \qquad ②$$

$$\frac{x}{2}+y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t, y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t, \qquad ③$$

将②，③代入平面 $x+y+z=0$，得 $z=-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t-\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t$，故 Γ 的参数方程为

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}}R\cos t,\quad y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t,$$

$$z=-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t-\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t,(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

$$=R\sqrt{\frac{2}{3}\sin^2 t+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}+\frac{\sin t}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{\sin t}{\sqrt{6}}-\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}t=R\mathrm{d}t.$$

所以

$$\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+2z)\,\mathrm{d}s$$

$$=R\int_0^{2\pi}\left(\frac{2R^2}{3}\cos^2 t+R^2\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}-\frac{\cos t}{\sqrt{6}}\right)^2-2R\left(\frac{\cos t}{\sqrt{6}}+\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)\right)\mathrm{d}t$$

$$=R^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}\cos^2 t+\frac{1}{2}-\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}t-2R^2\left(\frac{\sin t}{\sqrt{6}}-\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=R^3\left[\frac{1}{6}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+\frac{t}{2}+\frac{\cos^2 t}{2\sqrt{3}}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{4\pi}{3}R^3.$$

解法 2　由于积分曲线方程中的变量 x、y、z 具有轮换性，即三个变量轮换位置方程不变，且对弧长的曲线积分与积分曲线的方向无关．故有

$$\oint_{\Gamma}x^2\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}z^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{R^2}{3}\oint_{\Gamma}\mathrm{d}s=\frac{2\pi}{3}R^3,$$

同理

$$\oint_L x\mathrm{d}s=\oint_L y\mathrm{d}s=\oint_L z\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L(x+y+z)\,\mathrm{d}s=0.$$

所以

$$\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+2z)\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s+\frac{2}{3}\oint_{\Gamma}(x+y+z)\mathrm{d}s=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

10.3.21　（1）由题意

$$W=\int_L(y^2\mathrm{e}^x+3x^2+y^2)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x+2xy-3y^2)\mathrm{d}y.$$

令 $P=y^2\mathrm{e}^x+3x^2+y^2$，$Q=2y\mathrm{e}^x+2xy-3y^2$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y\mathrm{e}^x+2y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2y\mathrm{e}^x+2y.$$

因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以质点在此场内移动时，场力所做的功与路径无关．

（2）由于变力所做的功与路径无关，故取折线段 AOB．

$$AO: y=0, x:1\to 0,$$

$$\int_{AO}(y^2\mathrm{e}^x+3x^2+y^2)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x+2xy-3y^2)\mathrm{d}y=\int_1^0 3x^2\mathrm{d}x=-1.$$

$$OB: x=0, y:0\to 1,$$

$$\int_{OB}(y^2\mathrm{e}^x+3x^2+y^2)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x+2xy-3y^2)\mathrm{d}y=\int_0^1(2y-3y^2)\mathrm{d}y=0.$$

因此该变力所做的功为

$$W=\int_{AO}(y^2\mathrm{e}^x+3x^2+y^2)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x+2xy-3y^2)\mathrm{d}y$$
$$+\int_{OB}(y^2\mathrm{e}^x+3x^2+y^2)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x+2xy-3y^2)\mathrm{d}y$$
$$=-1.$$

10.3.22　由题意

$$\boldsymbol{F}=\frac{k}{|z|}\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

直线 L 的参数方程为：$x=at,y=bt,z=ct(c\neq 0)$，t 从 1 到 2．所以

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_1^2(-a^2t-b^2t-c^2t)\frac{k}{|c|t\sqrt{a^2t^2+b^2t^2+c^2t^2}}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{k\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ln 2}{|c|}.$$

10.3.23　（1）L 的参数方程为：$x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$，t 从 0 到 2π，所以

$$\int_L y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}a\sin t\,\mathrm{d}(a\cos t)+bt\,\mathrm{d}(a\sin t)+a\cos t\,\mathrm{d}(bt)$$
$$=\int_0^{2\pi}(-a^2\sin^2 t+abt\cos t+ab\cos t)\mathrm{d}t=-\pi a^2.$$

（2）$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^{2\pi}\frac{a\sin t}{a^2}\mathrm{d}(a\cos t)-\frac{a\cos t}{a^2}\mathrm{d}(a\sin t)=\int_0^{2\pi}(-1)\mathrm{d}t=-2\pi$.

10.5　综合提高训练

例 10.5.1　【2015（1）】　已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2}\\ z=x\end{cases}$，起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$，终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分

$$I=\int_L(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z.$$

解　由于 L 在 xOy 平面上的投影 $L_1:x^2+\dfrac{y^2}{2}=1\quad(x\geqslant 0)$，起点为 $(0,\sqrt{2})$，终点为 $(0,-\sqrt{2})$，参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\end{cases}$，从而曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\\ z=\cos t\end{cases}$，其起点和终点的参数分别为 $\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}$．将 L 的参数方程代入 I 得

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[(\sqrt{2}\sin t+\cos t)(-\sin t)+(\cos^2 t-\cos^2 t+\sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}\cos t+(\cos^2 t+2\sin^2 t)(-\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(-\sqrt{2}\sin^2 t+\sin t\cos t-\sin t-\sin^3 t)\mathrm{d}t=-\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi .$$

例 10.5.2 【2005（1）】设函数 $\phi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L \frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

（I）证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\oint_C \frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$.

（II）求函数 $\phi(y)$ 的表达式.

解 （I）如图 10.8 所示，在 C 内任意取定两点 M、N，做围绕原点的闭曲线 $MQNRM$，同时也得到另一围绕原点的封闭曲线 $MQNPM$.

由题设可知

$$\oint_{MQNRM}\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=-\oint_{MQNPM}\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=A \text{（}A\text{ 为常数）}.$$

根据第二类曲线积分的性质，利用上式，有

$$\begin{aligned}\oint_C\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}&=\int_{NRM}\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}+\int_{MPN}\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}\\&=\oint_{MQNRM}\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\oint_{MQNPM}\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}\\&=A-A=0.\end{aligned}$$

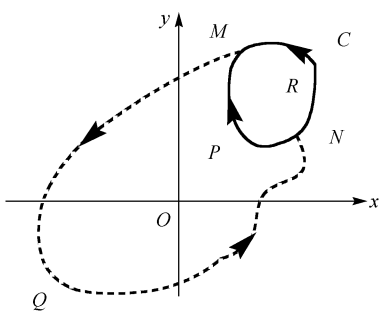


图 10.8

（II）设 $P=\frac{\phi(y)}{2x^2+y^4}$，$Q=\frac{2xy}{2x^2+y^4}$，则 P、Q 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续偏导数. 由（I）可知曲线积分 $\oint_L \frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 在区域 $x>0$ 内与路径无关，所以当 $x>0$ 时，有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 而

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2x^2\phi'(y)+\phi'(y)y^4-4\phi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2},$$

所以由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 得方程

$$\begin{cases}\phi'(y)=-2y\\ \phi'(y)y^4-4\phi(y)y^3=2y^5\end{cases},$$

解得 $\phi(y)=-y^2$.

例 10.5.3　已知平面区域 $D=\{(x,y)|\ 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为区域 D 的正向边界. 试证：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$；

（2）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\geqslant 2\pi^2$.

证　（1）由格林公式，得

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy,$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})dxdy.$$

因为 D 关于 $y=x$ 对称，所以

$$\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})dxdy.$$

故

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx.$$

（2）由（1）知

$$\begin{aligned}\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx&=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy\\&=\iint_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dxdy\\&\geqslant\iint_D 2dxdy\geqslant 2\pi^2.\end{aligned}$$

例 10.5.4　计算 $\iint_\Sigma\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}dS$，其中 Σ 是介于平面 $z=0$ 及 $z=H(H>0)$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

解　将 Σ 投影到坐标面 yOz 上，其投影区域为

$$D_{yz}:-R\leqslant y\leqslant R,0\leqslant z\leqslant H.$$

Σ 的方程为 $x=\pm\sqrt{R^2-y^2}\ (0\leqslant z\leqslant H)$，且

$$\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}.$$

记 $\Sigma_1:x=\sqrt{R^2-y^2}$，$\Sigma_2:x=-\sqrt{R^2-y^2}$，则

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma_1}\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}S=2\iint_{D_{yz}}\frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

例 10.5.5　【2014（1）】设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解　设 $\Sigma_1: z=1\ (x^2+y^2\leqslant 1)$ 取下侧，Σ 与 Σ_1 所包围的空间区域 $\Omega: x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$，$\Sigma_1$ 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$．因此

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由于

$$\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad \iiint_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\quad \iiint_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

所以

$$I=-\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(3r^2+7)\mathrm{d}z=-4\pi.$$

例 10.5.6　计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中，$f(x,y,z)$ 是连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

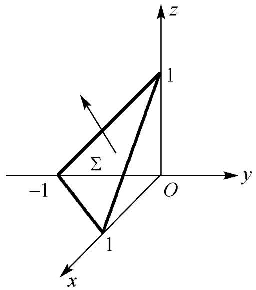


图 10.9

解　如图 10.9 所示，由于 Σ 取上侧，故 Σ 上任意一点的法向量 $\vec{n}$ 与 z 轴的夹角为锐角，其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

于是

$$I=\iint_{\Sigma}\{[f(x,y,z)+x]\cos\alpha+[2f(x,y,z)+y]\cos\beta+[f(x,y,z)+z]\cos\gamma\}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}[x-y+z+f(x,y,z)-2f(x,y,z)+f(x,y,z)]\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{2}.$$

例 10.5.7　已知力场 $\vec{F} = yz\boldsymbol{i} + zx\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$，问质点从原点沿直线移动到曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限部分上的哪一点做的功最大？并求出最大功.

解　如图 10.10 所示，设所求点 (x_0, y_0, z_0) 在椭球面上，原点到该点的直线的参数方程 $\Gamma:\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = z_0 t \end{cases}$，$t$ 从 0 到 1. 因此

$$W = \int_\Gamma yz\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z = \int_0^1 (y_0 z_0 t^2 \cdot x_0 + z_0 x_0 t^2 \cdot y_0 + x_0 y_0 t^2 \cdot z_0)\mathrm{d}t$$

$$= 3x_0 y_0 z_0 \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = x_0 y_0 z_0 .$$

求最大功的问题，实际上就是求 $W = xyz$ 在条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 下的极值问题. 设

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

分别对 x、y、z、λ 求偏导，并令偏导数等于 0，得

$$\begin{cases} F'_x = yz + 2\lambda\dfrac{x}{a^2} = 0 \\ F'_y = xz + 2\lambda\dfrac{y}{b^2} = 0 \\ F'_z = xy + 2\lambda\dfrac{z}{c^2} = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases},$$

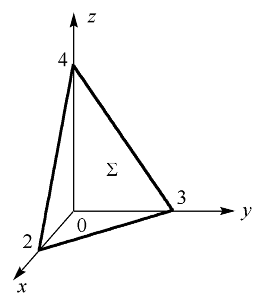


图 10.10

解得　$x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$，$y = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$，$z = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

由问题的实际意义知 $W_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}abc$，即质点从原点沿直线 Γ 移动到曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限部分上的点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 做的功最大，且最大功为 $W_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}abc$.

例 10.5.8　一颗地球同步轨道通信卫星的轨道位于地球的赤道平面内，且可近似认为是圆轨道. 通信卫星运行的角速率与地球自转的角速率相同，即人们看到它在天空不动. 若地球的半径取为 $R = 6400$ km，问卫星距地面的高度 h 应为多少？试计算通信卫星的覆盖面积.

解　设卫星距地面的高度 h. 卫星所受的万有引力为 $G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}$，卫星所受的离心力为 $m\omega^2(R+h)$. 其中 M 是地球质量，m 是卫星质量，ω 是卫星运行的角速率，G 是万有引力常数，根据牛顿第二定律

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\omega^2(R+h),$$

所以

$$(R+h)^3=\frac{GM}{\omega^2}=\frac{GM}{R^2}\cdot\frac{R^2}{\omega^2}=g\frac{R^2}{\omega^2}\qquad（g\text{ 是重力加速度}），\tag{1}$$

将 $g=9.8$， $R=6400000$， $\omega=\dfrac{2\pi}{24\times 3000}$ 代入（1），则有

$$h=\sqrt[3]{g\frac{R^2}{\omega^2}}-R=\sqrt[3]{9.8\frac{6400000^2\times 24^2\times 3600^2}{4\pi^2}}-6400000$$

$$\approx 36000000(\mathrm{m})=36000(\mathrm{km}).$$

取地心为坐标原点，地心到卫星中心的连线为 z 轴建立坐标系．卫星的覆盖面积为

$$S=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S.$$

其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$ 上被圆锥角 β 所限定的曲面部分.

$$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad（D_{xy}:x^2+y^2\leqslant R^2\sin^2\beta）$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sin\beta}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}r\mathrm{d}r=2\pi R[-\sqrt{R^2-r^2}]\Big|_0^{R\sin\beta}$$

$$=2\pi R^2(1-\cos\beta).$$

由于 $\cos\beta=\sin\alpha=\dfrac{R}{R+h}$，代入上式得

$$S=2\pi R^2(1-\frac{R}{R+h})=4\pi R^2\frac{h}{2(R+h)}.\tag{2}$$

注意到地球的表面积为 $4\pi R^2$，可知因子 $\dfrac{h}{2(R+h)}$ 恰为卫星覆盖面积与地球表面积的比例系数，将 $R=6.4\times 10^6$， $h=36\times 10^6$ 代入

$$\frac{h}{2(R+h)}=\frac{36\times 10^6}{2(36+6.4)\times 10^6}\approx 0.425.$$

可以看到卫星覆盖了全球三分之一以上的面积，故使用三颗相同为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的通信卫星就可以覆盖几乎全部地球表面.

最后，利用（2）计算通信卫星的实际覆盖面积

$$S=4\pi\times(6.4\times 10^6)^2\times 0.425=2.19\times 10^{14}(\mathrm{m}^2)=2.19\times 10^8(\mathrm{km}^2).$$

第 11 章　无 穷 级 数

11.1　知 识 要 点

11.1.1　无穷级数的概念

若 $u_n (n = 1, 2, \cdots)$ 为常数，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为**常数项无穷级数**，简称**级数**，u_n 称为**通项**或**一般项**．$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**前** n **项部分和**，数列 $\{S_n\}$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**部分和数列**，若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，S 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**和**，如果极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．

当级数收敛时，其部分和 S_n 是级数的和 S 的近似值．称 $R_n = S - S_n$ 为级数的**余项**，即

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + n_{n+2} + \cdots,$$

余项的绝对值 $|R_n|$ 就是用 S_n 作为 S 的近似值所产生的误差．

11.1.2　无穷级数的性质

（1）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，c 为任一常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n$；当 $c \neq 0$ 时，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也发散．

（2）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ .$$

（3）在一个级数中加上、去掉或改变有限项，级数的敛散性不变．

（4）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对这个级数的项任意添加括号后所成的级数仍然收敛，且其和不变；反之，则不一定成立．

（5）（**级数收敛的必要条件**）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$．

11.1.3　常见级数的敛散性

（1）几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$，当 $|q|<1$ 时，级数收敛，且级数的和为 $\dfrac{a}{1-q}$，当 $|q|\geqslant 1$，级数发散.

（2）p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p} = 1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \cdots + \dfrac{1}{n^p} + \cdots$，当 $p>1$ 时，级数收敛，当 $p\leqslant 1$ 时，级数发散.

（3）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^p n} = \dfrac{1}{2\ln^p 2} + \dfrac{1}{3\ln^p 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\ln^p n} + \cdots$，当 $p>1$ 时，级数收敛，当 $p\leqslant 1$ 时，级数发散.

11.1.4　正项级数敛散性的判别法

1．收敛的充分必要条件

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件为部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

2．比较判别法

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的通项满足关系式 $u_n \leqslant cv_n$，其中 c 为大于零的常数. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

3．比较判别法的极限形式

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = l$.

（1）当 $0<l<+\infty$ 时，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性相同.

（2）当 $l=0$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

（3）当 $l=+\infty$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

4．比值判别法（达朗贝尔判别法）

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则当 $\rho<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $\rho>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；当 $\rho=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛，也可能发散，判别法失效.

5．根值判别法（柯西判别法）

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，且有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则当$\rho<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$\rho>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；当$\rho=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛，也可能发散，判别法失效．

11.1.5　任意项级数的敛散性

1．交错级数的收敛性判断（莱布尼茨判别法）

设交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n\geqslant 0)$满足条件：

（1）$u_n\geqslant u_{n+1}, n=1,2,3,\cdots$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$．

则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛，且其和$S\leqslant u_1$．

2．任意项级数的条件收敛与绝对收敛

对于任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为**绝对收敛**．如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为**条件收敛**．若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛；反之，不一定成立．

11.1.6　函数项级数的概念

设$u_n(x)\ (n=1,2,\cdots,)$为定义在区间I上的函数，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

为区间I上的**函数项级数**．若$x_0\in I$，常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛，则称$x_0$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的**收敛点**，否则称为**发散点**．所有收敛点的集合称为**收敛域**，所有发散点的集合称为**发散域**．在收敛域上，函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和是$x$的函数，记为$S(x)$，通常称$S(x)$为函数项级数的**和函数**，该函数的定义域即为级数的收敛域，因此在收敛域内有

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots.$$

若记$S_n(x)$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的前$n$项部分和，即$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$，则在收敛域内有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$．

11.1.7　幂级数的概念

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为在 x_0 点处的**幂级数**，其中 $a_n\ (n=0,1,\cdots)$ 称为**幂级数的系数**，该形式称为幂级数的一般形式．当 $x_0=0$ 时，幂级数化为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，该形式称为幂级数的标准形式．

阿贝尔（Abel）定理　如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 处收敛，则在满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 处幂级数绝对收敛；反之，如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0$ 处发散，则在满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的一切 x 处幂级数发散．

由 Abel 定理可知，若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x 轴的正半轴上同时存在收敛点和发散点，则一定存在一个正数 R ，使得 $|x|<R$ 时，级数绝对收敛；$|x|>R$ 时，级数发散； $x=R$ 或 $x=-R$ 级数可能收敛，也可能发散．这里的 R 称为幂级数的**收敛半径**．若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛，则收敛半径 $R=0$ ，若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在整个实数域上收敛， $R=+\infty$ ．

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ \ (a_n\neq 0)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则级数的收敛半径为

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty \\ +\infty, & \rho=0 \\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}.$$

对于幂级数的一般形式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ，级数在开区间 (x_0-R, x_0+R) 内绝对收敛，在两个端点 $x=x_0\pm R$ 上可能收敛也可能发散，在 $[x_0-R, x_0+R]$ 之外发散．

11.1.8　幂级数的和函数的性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 I ，收敛半径为 R ，和函数为 $S(x)$ ，则：

（1） $S(x)$ 在收敛域 I 上连续；

（2） $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导，且有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

即幂级数可以逐项求导数，新得到的幂级数的收敛半径仍为 R，但在端点处的收敛性可能会变化；

（3）$S(x)$ 在 I 上可积，且有

$$\int_{x_0}^{x}S(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x}a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

即幂级数可以逐项积分，新得到的幂级数的收敛半径仍为 R，但在端点处的收敛性可能会变化.

11.1.9　函数的幂级数展开

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有任意阶导数，则 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在该邻域内收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

其中 $R_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒余项，$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x 与 x_0 之间.

11.1.10　常见的麦克劳林公式

（1）$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots,\quad x\in(-1,1)$；

（2）$\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

（3）$\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

（4）$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$；

（5）$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots,\quad x\in(-1,1]$；

（6）$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1)$.

11.1.11　傅里叶级数

（1）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且能展开成傅里叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

其中，

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x \qquad (k = 0,1,2,3,\cdots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x \qquad (k = 1,2,3,\cdots).$$

（2）定理［收敛定理，狄利克雷（Dirichlet）充分条件］ 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

（a）在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，

（b）在一个周期内至多只有有限个极值点，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，极限收敛于 $f(x)$；当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right]$.

（3）设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，且能展开成傅里叶级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

其中，

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x (k = 0,1,2,3,\cdots),$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x (k = 1,2,3,\cdots).$$

11.2　典型例题分析

11.2.1　题型一、利用定义与性质判断级数的敛散性

例 11.2.1　判断级数 $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$ 是否收敛.

解　由于级数的前 n 项和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \\ &= \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right) = \frac{1}{5}-\frac{1}{5(5n+1)}, \end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{5} < +\infty$，因此，级数收敛.

注　用定义判别级数是否收敛，即判别级数的前 n 项部分和数列 $\{S_n\}$ 是否有极限. 本题中，$u_n = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 可写成两项之差 $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5n+1}$，从而 S_n 中能消去中间各项，剩下首尾项，进而容易判定 S_n 的极限是否存在. 将通项拆成两项之差，以求得部分和的方法称为**拆项法**.

例 11.2.2　用定义判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n\ln(1+n)}$ 的敛散性.

解　原式$=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n)-\ln n}{\ln n\ln(1+n)}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\ln n}-\dfrac{1}{\ln(n+1)}\right)$，

级数的部分和

$$S_n=\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}\right)+\left(\frac{1}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(n+1)}\to\frac{1}{\ln 2}\quad(n\to\infty),$$

所以原级数收敛，且收敛于 $\dfrac{1}{\ln 2}$.

例 11.2.3　判断级数敛散性：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$.

解　因为 $u_n=\dfrac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=e^0=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1\neq 0$．根据级数收敛的必要条件，原级数发散.

11.2.2　题型二、判断正项级数的敛散性

例 11.2.4　设数列 $\{a_n\}$ 为单调增加的有界正数列，证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

证　因为数列 $\{a_n\}$ 为单调增加有上界，所以极限存在．设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，考虑

$$0<u_n=1-\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}<\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1},$$

而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)=a-a_1$ 存在，由比较审敛法知，原级数收敛.

例 11.2.5　判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　由于

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\mathrm{d}x=u_{n+2},$$

$$u_n\geqslant\frac{u_n+u_{n+2}}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2(n+1)},$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2(n+1)}$发散，从而原级数发散.

11.2.3 题型三、判断任意项级数的敛散性

例 11.2.6 判断级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$的敛散性.

解 记$u_n=\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)=(-1)^n\sin\dfrac{1}{\ln n}$，因为$|u_n|=\sin\dfrac{1}{\ln n}$，又$\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{n}$，知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$发散，从而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n|$发散，即级数非绝对收敛.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{\ln n}=0$，且$\sin\dfrac{1}{\ln x}$在$(2,+\infty)$内单调减少，由莱布尼茨判别法知，原级数条件收敛.

例 11.2.7 证明级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$收敛.

证 设$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则原级数为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}f(n)$．当$x>0$时，

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)<0,$$

即$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递减，从而$f(n)>f(n+1)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$，由莱布尼茨判别法可知，原级数收敛.

例 11.2.8 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$是否收敛？若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

解 因为$\dfrac{1}{n-\ln n}>\dfrac{1}{n}$，而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}$发散．即原级数非绝对收敛．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$是交错级数，利用莱布尼茨定理求解．因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}}=0.$$

记 $f(x)=x-\ln x$，当 $x>1$ 时，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，即函数 $\dfrac{1}{x-\ln x}$ 单调递减．故当 $n>1$ 时，$\left\{\dfrac{1}{n-\ln n}\right\}$ 单调递减，由莱布尼茨定理可知，原级数条件收敛．

11.2.4　题型四、函数项级数收敛域的求解

例 11.2.9　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n x$ 的收敛域．

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\ln x)^{n+1}}{(\ln x)^n}\right|=|\ln x|,$$

所以当 $|\ln x|<1$，即 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<x<\mathrm{e}$ 时，级数绝对收敛；当 $|\ln x|>1$，即 $x>\mathrm{e}$ 或 $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，级数发散；当 $x=\mathrm{e}$，级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$，当 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$，根据级数收敛的必要条件知，级数发散．故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ 的收敛域是 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$．

例 11.2.10　试求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域．

解　记 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}}{\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n}\right|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|,$$

当 $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|<1$，即 $x>0$ 时，级数绝对收敛；当 $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|>1$，即 $x<0$ 时，级数发散；当 $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|=1$，即 $x=0$ 时，级数化为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$，由莱布尼茨定理可知，级数收敛，因此原级数的收敛域为 $[0,+\infty)$．

11.2.5　题型五、讨论幂级数的收敛半径及收敛域

例 11.2.11　【2011（1）】设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\,(n=1,2,\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为（　　）．

（A）$(-1,1]$；　（B）$[-1,1)$；　（C）$[0,2)$；　（D）$(0,2]$．

解　幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域一定关于 $x=1$ 对称，因此选项（A）和（B）均错误；因为 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，所以 $a_n > 0$，由交错级数的莱布尼茨法则可知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，故 $x=0$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛点，因此选项（D）错误，从而答案选（C）.

例 11.2.12　求下列幂级数的收敛域：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$；　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$；　　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$.

解　（1）记 $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2,$$

所以收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$，收敛区间为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 又因为当 $x=\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 条件收敛；当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}x^n$ 的收敛域为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

（2）记 $a_n = (-1)^n n^n$，由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = +\infty$，得收敛半径为 $R=0$，所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛.

（3）记 $a_n = \frac{1}{n!}$，由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$，得收敛半径为 $R=+\infty$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

11.2.6　题型六、求幂级数的和函数

例 11.2.13　求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的收敛域及和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和.

解　由于

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1,$$

级数的收敛半径 $R=1$，在端点 $x=1$ 处，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$，由于级数的一般项不趋于 0，因此级数发散；在 $x=-1$ 处，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1}$，由于级数的一般项不趋于 0，因此级数发散，故幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$， $x\in(-1,1)$，积分得

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

上式两边对 x 求导得

$$S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x\right]=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1).$$

又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1),$$

取 $x=\dfrac{1}{2}$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=4.$$

例 11.2.14　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数.

解法 1　令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+\cdots$，易得级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots,$$

从而

$$S(x)+S'(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots=\mathrm{e}^x,$$

解一阶线性微分方程 $S(x)+S'(x)=\mathrm{e}^x$ 可得 $S(x)=C\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$，由 $S(0)=1$ 可得 $C=\dfrac{1}{2}$，从而 $S(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x)$.

解法 2　由于

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{5!}x^5+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

因此

$$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=2\left(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

11.2.7　题型七、函数展开成幂级数问题

例 11.2.15　将下列函数展开成 x 的幂级数：

（1） $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3x+2}$；　　（2） $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　（1）$f(x)$ 是有理函数，应将其化为幂函数与部分分式乘积的形式，再利用相应公式展开.

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+3x+2}=x^2\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right]=x^2\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}\right]$$

$$=x^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^{n+2},$$

易知收敛域为 $(-1,1)$.

（2）对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2}]'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，利用 $(1+x)^m$ 的展开式展开 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，再对展开式逐项积分求解．因为

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad x\in[-1,1],$$

所以

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1].$$

例 11.2.16　已知 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$x\in(-\infty,+\infty)$，且对任意的 x，$F'(x)=f(x)$，求 $F(x)$ 在原点的幂级数展开式.

解　根据幂级数的逐项积分性质，及 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n, x\in(-\infty,+\infty)$，得

$$F(x)-F(0)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

故 $F(x)$ 在原点的幂级数展开式为

$$F(x)=F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n,x\in(-\infty,+\infty).$$

例 11.2.17　求函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式.

解　已知 $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$，$x\in(-\infty,+\infty)$，所以

$$xe^x = e[(x-1)e^{x-1} + e^{x-1}] = e\left[(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n\right]$$
$$= e\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)(x-1)^n\right].$$

11.2.8　题型八、傅里叶级数问题

例 11.2.18　设 $f(x) = 2 - x\ (0 \leqslant x < 2)$，而 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}(-\infty < x < +\infty)$，其中 $b_n = \int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\ (n = 1,2,\cdots)$，求 $S(-1)$ 和 $S(0)$.

分析　此题不需要进行傅里叶展开，而是应用狄利克雷定理判别当 $x = 0$ 和 $x = -1$ 时，级数收敛于何值.

解　由已知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的正弦级数，也是奇函数

$$F(x) = \begin{cases} -2 - x & -2 \leqslant x < 0 \\ 2 - x & 0 \leqslant x < 2 \end{cases}.$$

在 $[-2,2]$ 上的傅里叶（正弦）级数. 由狄利克雷定理，在 $F(x)$ 的连续点 $x = -1$ 处，$S(-1) = F(-1) = -1$；在 $F(x)$ 的间断点 $x = 0$ 处，

$$S(0) = \frac{1}{2}[F(0-0) + F(0+0)] = \frac{1}{2}(-2+2) = 0 .$$

例 11.2.19　设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$，证明对任意的常数 $\alpha > 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛.

证　令 $\tan x = t$，得

$$0 < a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

所以

$$0 < \frac{a_n}{n^\alpha} < \frac{1}{(n+1)n^\alpha} < \frac{1}{n^{1+\alpha}} .$$

由于当 $\alpha > 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛，根据比较判敛法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛.

例 11.2.20　将函数 $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leqslant x < 0 \\ x & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ 展开为傅里叶级数.

解　所给函数满足狄利克雷充分条件. 则拓广的周期函数的傅里叶级数展开式在 $[-\pi,\pi]$ 收敛于 $f(x)$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx$$
$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi} & n = 2k-1, k = 1,2,\cdots \\ 0 & n = 2k, k = 1,2,\cdots \end{cases},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x = 0,$$

所求函数的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

11.2.9　题型九、无穷级数的应用问题

例 11.2.21　设某人在银行存款 A 元，假定银行存款的年利率为常数 a，依复利计算，如果他要在第一年末提取 1 元，在第二年年末提取 4 元，……，在第 n 年年末提取 n^2 元，并且他希望永远如此提取，问他至少需要事先存入多少本金？

解　设 A_n 是为了保证第 n 年年末提取 n^2 元所存入 n 年的本金，那么这部分本金第 n 年年末的本利和为 $A_n(1+a)^n$，于是有 $A_n(1+a)^n = n^2$，得

$$A_n = \frac{n^2}{(1+a)^n},\quad n = 1, 2, \cdots,$$

从而，需要事先存入的本金至少为

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+a)^n} = \frac{1}{1+a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+a)^{n-1}}.$$

设 $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$ 的和函数，$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$，容易求得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$. 由于

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2x^{n-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\cdot\left(\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)' \\ &= x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)' = x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' \\ &= x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

因此

$$S(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

从而

$$A = \frac{1}{1+a}S\left(\frac{1}{1+a}\right) = \frac{1}{1+a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+a)^{n-1}} = \frac{(1+a)(2+a)}{a^3}.$$

11.3　深 化 训 练

11.3.1　单项选择题

（1）【2006（3）】若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数（　　）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛；　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛；

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛；　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

（2）【2009（1）】设有两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 收敛；

（B）当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 发散；

（C）当 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2$ 收敛；

（D）当 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2$ 发散.

（3）设常数 $\alpha>0$，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_{2n-1}}}{\sqrt{n^2+\alpha}}$（　　）.

（A）发散；　　（B）条件收敛；

（C）绝对收敛；　　（D）敛散性与 α 的值有关.

11.3.2　判别下列正项级数是否收敛：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot n!}{n^n}$；　（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$；　（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\sin^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}$.

11.3.3　判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$；　（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$；　（6）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

11.3.4　判别下列数项级数是否收敛，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$；　（2）$\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$.

11.3.5　已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性，若收敛求其和.

11.3.6　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛.

11.3.7　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$ 的和函数.

11.3.8　将函数 $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数.

11.3.9　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$ 的和.

11.3.10　将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

（1）$f(x)=\begin{cases}e^x & -\pi\leqslant x<0\\ 1 & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$；　　（2）$f(x)=\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{\pi}\right)$.

11.3.11　将 $f(x)=|\sin x|\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展成傅立叶级数.

11.4　深化训练详解

11.3.1　（1）（D）. **提示**　由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则该级数去掉第一项后得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 也收敛，由级数的性质知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

（2）（C）. **提示**　选项（A）错误，如取 $a_n=b_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$；选项（B）和（D）错误，如取 $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 可知，数列 $\{a_n\}$ 有界；由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛可知，$\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$，即 $|b_n|$ 也有界. 因此存在常数 $M>0$，使得

$$0\leqslant a_n^2b_n^2=a_n^2\cdot|b_n|\cdot|b_n|\leqslant M\cdot|b_n|,$$

根据比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛，因此选项（C）正确.

（3）（C）. **提示**　因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k-1}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{2n-1}a_k$，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛. 又因为

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{a_{2n-1}}}{\sqrt{n^2+\alpha}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(a_{2n-1}+\frac{1}{n^2+\alpha}\right),$$

所以原级数绝对收敛.

11.3.2　（1）由于

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散，由比较判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 发散.

（2）由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}<1,$$

由比值判别法可知，级数收敛.

（3）当 $0<a<1$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=1\neq 0$，所以由级数收敛的必要条件知级数发散；当 $a>1$ 时，由于

$$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}$ 收敛，由比较判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 收敛.

（4）由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

由比值判别法可知，级数收敛.

（5）由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1,$$

由比值判别法可知，级数收敛.

（6）因为 $\sin^2\dfrac{n}{3}\pi\leqslant 1$，因此

$$\frac{n\cdot\sin^2\dfrac{n}{3}\pi}{2^n}\leqslant\frac{n}{2^n}.$$

记 $u_n=\dfrac{n}{2^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}}}{\dfrac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1,$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 收敛，由正项级数的比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot\sin^2\dfrac{n}{3}\pi}{2^n}$ 收敛.

11.3.3　（1）**解法 1**　利用无穷级数收敛的性质. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{2^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ 都是几何级数，均收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

解法 2　该级数为正项级数，利用比较法，因为 $\dfrac{2+(-1)^n}{2^n} \leqslant \dfrac{3}{2^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{2^n}$ 收敛，所以原级数收敛.

解法 3　该级数为正项级数，利用根值法，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}} = \dfrac{1}{2} < 1$，所以原级数收敛.

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}} \Big/ \dfrac{1}{n} = 1$，由比较法的极限形式知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 具有相同的敛散性，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，所以原级数发散.

（3）由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[(n+1)!]^2}{2(n+1)^2} \Big/ \dfrac{(n!)^2}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$，所以原级数发散.

（4）由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{\mathrm{e}}{3} < 1$，故原级数收敛.

（5）一般项 $u_n = \dfrac{1}{n(1+\ln^2 n)}$，利用比值法、比较法、根值法都不易判定级数的敛散性，注意到 u_n 是单调递减数列，因为

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ln x}{1+\ln^2 x} = \arctan \ln x \Big|_2^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan \ln 2,$$

积分收敛，所以原级数收敛.

（6）因为 $\sqrt[n]{\ln n} \leqslant \sqrt[n]{n}$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \geqslant 1$，由级数收敛的必要条件可知，原级数发散.

11.3.4　（1）因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \dfrac{n+1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = 1,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，根据正项级数比值判别法的极限形式知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \ln \dfrac{n+1}{n}\right|$ 发散. 又因为原级数为交错级数，且满足

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right), \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

根据莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \dfrac{n+1}{n}$ 收敛，且为条件收敛.

（2）由于

$$\sin\left(n\pi + \frac{1}{\ln n}\right) = (-1)^n \sin \frac{1}{\ln n},$$

故级数为交错级数．又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{\ln n}}{\dfrac{1}{n}}=\infty$，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)\right|$ 发散．而原级数为交错级数，且满足

$$u_n=\sin\frac{1}{\ln n}>\sin\frac{1}{\ln(n+1)}=u_{n+1},\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\ln n}=0,$$

根据莱布尼茨判别法知，原级数收敛，且为条件收敛．

（3）设 $u_n=\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!}\bigg/\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)n}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}>1,$$

所以原级数发散．

11.3.5　因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 存在，所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}[2a_{2n-1}-(-1)^{n-1}a_n]$$

收敛，且又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2a_{2n-1}=10$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}[2a_{2n-1}-(-1)^{n-1}a_n]=8\,.$$

11.3.6　因为 $0\leqslant c_n-a_n\leqslant b_n-a_n(n=1,2,\cdots)$，则由已知条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛，根据比较判别法有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n+a_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

11.3.7　因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\bigg/\frac{1}{n(n+1)}\right|=1,$$

且 $x=\pm1$ 时原级数收敛，所以收敛域为 $[-1,1]$．注意到 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，$x\in(-1,1)$，需用逐项微分法去掉一般项中分母的系数．令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$，则 $S(0)=0$，当 $x\neq0$ 时，

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n-1}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

再令 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$，则 $S_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}-1$，所以

$$S_1(x)=\int_0^x S_1'(x)\mathrm{d}x+S_1(0)=\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)\mathrm{d}x=-x-\ln(1-x)\quad(x\neq 1),$$

故

$$S'(x)=\frac{1}{x^2}S_1(x)=-\frac{1}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x^2}(x\neq 0,x\neq 1),$$

从而

$$\begin{aligned}S(x)&=\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x+S(0)=\int_0^x\left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-x)\right]\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^x\left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-x)\right]\mathrm{d}x=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x).\end{aligned}$$

又因为

$$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n(1)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

所以

$$S(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x=1\\ 1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x) & x\neq 0,x\neq 1\end{cases}.$$

11.3.8　由题意，有

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\left(\frac{1}{2-x}\right)'=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\right)'=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^n},x\in(-2,2).$$

11.3.9　**解法 1**　考察幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^{n-1}$，易知收敛域为$(-\infty,+\infty)$，由

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^x\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x\right]'=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right]'=\left[x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right]'=(x\mathrm{e}^x)'=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

得$S(1)=2\mathrm{e}$，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}=2\mathrm{e}$.

解法 2

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}+\mathrm{e}=2\mathrm{e}.\end{aligned}$$

11.3.10 （1）$f(x)=\dfrac{1+\pi-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx$

$$+\frac{1}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n+(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nx\quad(-\pi<x<\pi).$$

（2）$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n\pi}\sin nx,\ x\in(-\pi,\pi)$.

11.3.11 将 $f(x)$ 以 2π 为周期做周期延拓，由 $f(x)$ 为偶函数，得 $b_n=0\,(n=1,2,\cdots)$，

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x]\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi}\\&=\frac{1}{\pi}[(-1)^{n-1}-1][\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}]=\frac{1}{\pi(n^2-1)}[(-1)^{n-1}-1]\\&=\begin{cases}0 & n=2k-1\\ -\dfrac{4}{\pi(4k^2-1)} & n=2k\end{cases}\qquad(n\neq 0,1),\end{aligned}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi},\quad a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}x=0.$$

因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且仅有三个极值点，所以由收敛性定理可知

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1},\qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

11.5 综合提高训练

例 11.5.1 【2014（3）】求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}\right|=1,$$

因此级数的收敛半径 $R=1$，根据级数收敛的必要条件可知，当 $x=\pm1$ 时，级数均发散，故级数的收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)+(n+1)(n+2)]x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'+\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''$$

$$=\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{3-x}{(1-x)^3},x\in(-1,1).$$

例 11.5.2 【2007（3）】将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

解　由于

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}=\frac{1}{(x-4)(x+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right),$$

而

$$\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-1-3}=-\frac{1}{3-(x-1)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{3}}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}},$$

上式成立的条件为：$\left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1$，即 $|x-1|<3$．又因为

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{-(x-1)}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-(x-1)}{2}\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^{n+1}},$$

上式成立的条件为 $\left|-\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\right|<1$，即 $|x-1|<2$．因此

$$f(x)=\frac{1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(x-1)^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^{n+1}}\right]=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)}{3^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-3)^{n+1}-2^{n+1}}{6^{n+1}}\right](x-1)^n,$$

且其收敛区间为 $|x-1|<3$ 与 $|x-1|<2$ 的交集 $|x-1|<2$，即 $x\in(-1,3)$.

例 11.5.3　求下列幂级数的收敛半径与收敛域：

（1）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$；　（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$；　（3）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

解　（1）因为 $a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}(n=1,2,\cdots)$，而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$ 不存在，利用比值法求收敛半径的方法失效，故用根值法．因为

$$\frac{1}{2^n}\leqslant\left|\frac{2+(-1)^n}{2^n}\right|\leqslant\frac{3}{2^n}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3}{2^n}}=\frac{1}{2},$$

故

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2+(-1)^n}{2^n}\right|}=\frac{1}{2}<1,$$

从而收敛半径 $R=2$．当 $x=2$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^n]$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}[2+(-1)^n]\neq 0$，级数发散；同理，当 $x=-2$ 时，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^n](-1)^n$ 发散．所求收敛域为 $(-2,2)$．

（2）因为 $u_n(x)=\dfrac{n}{2^n}x^{2n}(n=1,2,\cdots)$，原级数缺少 x 的奇次幂项，故用比值法进行求解．因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)2^n x^{2(n+1)}}{2^{n+1}nx^{2n}}\right|=\frac{x^2}{2}<1,$$

所以 $|x|<\sqrt{2}$，$R=\sqrt{2}$，当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散．所求收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$．

（3）因为 $u_n(x)=\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$，令 $y=x+1$，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}y^n$，取 $a_n=\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}$，则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}]n}{[3^n+(-2)^n](n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}[1+(-\frac{2}{3})^{n+1}]n}{3^n[1+(-\frac{2}{3})^n](n+1)}\right|=3,$$

所以 $R=\dfrac{1}{3}$．当 $y=-\dfrac{1}{3}$ 时，考查级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$，易知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 都收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ 收敛；当 $y=\dfrac{1}{3}$ 时，考查级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ 发散．从而幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}y^n$ 的收敛域为 $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，由 $y=x+1$ 解不等式 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x+1<\dfrac{1}{3}$ 得原级数的收敛域为 $\left[-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$．

例 11.5.4　设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，且 a_k、b_k 是 $f(x)$ 的傅里叶系数，试证对任意自然数 n 成立不等式

$$\frac{a_0{}^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2+b_k{}^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

分析 左边涉及傅里叶级数前 n 项的系数平方和，右边是 $f^2(x)$ 的积分，故考查 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s_n(x)]^2\mathrm{d}x$.

证 令 $s_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}[a_k\cos kx+b_k\sin kx]$，其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\ (k=0,1,\cdots,n)\text{，}\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\ (k=1,2,\cdots,n)\text{，}$$

则

$$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s_n(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)s_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}[s_n(x)]^2\mathrm{d}x .$$

利用三角函数系的正交性有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)s_n(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]\mathrm{d}x=\frac{a_0{}^2}{2}\pi+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2+b_k{}^2)\text{，}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}[s_n(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]^2\mathrm{d}x=\frac{a_0{}^2}{2}\pi+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2+b_k{}^2)\text{，}$$

故

$$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0{}^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2+b_k{}^2)\right]\text{，}$$

即

$$\frac{a_0{}^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2+b_k{}^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x .$$

例 11.5.5 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\dfrac{1}{n(2n-1)})x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $f(x)$.

解 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{x^2}{1+x^2}(-1<x<1)\text{，}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}&=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\mathrm{d}x\\&=2\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\mathrm{d}x=2\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{2n-2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\\&=2\int_0^x\left[\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=2\int_0^x\left[\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x\\&=2\int_0^x\arctan x\mathrm{d}x=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}\text{，}\end{aligned}$$

$$= 2x\arctan x - \ln(1+x^2) \qquad (-1<x<1)$$

所以幂级数的收敛域为 $(-1,1)$，和函数为

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x\arctan x - \ln(1+x^2)\text{，}\quad x\in(-1,1)\text{.}$$

例 11.5.6　已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，　$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$　，证明

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}\text{.}$$

解　因为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为 $[-1,1]$，所以函数 $f(x)$ 定义域是 $[-1,1]$，函数 $f(1-x)$ 定义域是 $[0,2]$．令 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$，则其定义域为 $(0,1)$．根据幂级数的可导性及逐项求导公式，得

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x}\ln(1-x)\text{,}$$

$$f'(1-x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}$$

$$=\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}=\frac{1}{1-x}\ln x,$$

又

$$[\ln x\ln(1-x)]'=\frac{1}{x}\ln(1-x)-\frac{1}{1-x}\ln x\text{,}$$

所以

$$F'(x)=f'(x)+f'(1-x)+\big(\ln x\ln(1-x)\big)'=0,\ x\in(0,1)\text{.}$$

因此

$$F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)\equiv C,\ x\in(0,1)\text{.}$$

上式两端令 $x\to1^-$ 取极限，得

$$C=\lim_{x\to1^-}F(x)\ =f(1)+f(0)+\lim_{x\to1^-}\ln(1+(x-1))\ln(1-x)\ =f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\text{,}$$

所以

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6},\ x\in(0,1)\text{.}$$

例 11.5.7　设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 1<x<2\end{cases}$，写出 $f(x)$ 的傅里叶级数与其和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

解　根据傅里叶系数的计算公式，得

$$a_n=\int_0^2 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\ (n=1,2,3,\cdots),$$

$$a_0=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$b_n=\int_0^2 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1 x\sin n\pi x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\ (n=1,2,3,\cdots),$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\cos n\pi x+(-1)^{n+1}\sin n\pi x\right].$$

其和函数的周期为 2，且

$$S(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x<1 \\ \dfrac{1}{2} & x=1 \\ 0 & 1<x<2 \end{cases}.$$

令 $x=0$，得

$$S(0)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\right]=\frac{1}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}，\text{且}\ S(0)=0，$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

2013 年考研数学一高等数学考题

1．已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k、c 为常数，且 $c\neq 0$，则（　　）.

（A）$k=2,\ c=-\dfrac{1}{2}$；　　（B）$k=2,\ c=\dfrac{1}{2}$；

（C）$k=3,\ c=-\dfrac{1}{3}$；　　（D）$k=3,\ c=\dfrac{1}{3}$.

解　正确答案为（D），本题可以直接利用洛必达法则进行求解．由于常数 $c\neq 0$，且

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{k(1+x^2)x^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{3-k}}{k(1+x^2)},$$

因此可推知 $k=3$，此时 $c=\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{3}$.

2．曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　　）.

（A）$x-y+z=-2$；　　（B）$x+y+z=0$；

（C）$x-2y+z=-3$；　　（D）$x-y-z=0$.

解　正确答案为（A）．记 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$，则

$$F_x'(x,y,z)=2x-y\sin(xy)+1,\quad F_y'(x,y,z)=-x\sin(xy)+z,\quad F_z'(x,y,z)=z.$$

从而 $F_x'(0,1,-1)=1$，$F_y'(0,1,-1)=-1$，$F_z'(0,1,-1)=1$，它们即为曲面 $F(x,y,z)$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的法向量的三个分量，所以在该点处的切平面方程为

$$1\cdot(x-0)+(-1)(y-1)+1\cdot(z+1)=0，即\ x-y+z=-2.$$

3．设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x$，$(n=1,2,\cdots)$ 令 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$________.

（A）$\dfrac{3}{4}$；　　（B）$\dfrac{1}{4}$；　　（C）$-\dfrac{1}{4}$；　　（D）$-\dfrac{3}{4}$.

解　正确答案为 C．设 $F(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，且

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x<1 \\ -f(-x) & -1<x<0 \end{cases},$$

则 $F(x)$ 以 2 为周期的傅里叶系数为

$a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$，

$b_n=\displaystyle\int_{-1}^{1}F(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 F(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$，

故 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 是 $F(x)$ 的傅里叶级数的和函数．由狄利克雷收敛定理，得

$$S\left(-\frac{9}{4}\right)=S\left(-\frac{1}{4}\right)=F\left(-\frac{1}{4}\right)=-f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}.$$

4．设 $L_1:x^2+y^2=1$，$L_2:x^2+y^2=2$，$L_3:x^2+2y^2=2$，$L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线，记 $I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y$，$(i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$（　　）．

（A）I_1；　　（B）I_2；　　（C）I_3；　　（D）I_4．

解　正确答案为（D）．设 $D_1:x^2+y^2\leqslant 1$，$D_2:x^2+y^2\leqslant 2$，$D_3:x^2+2y^2\leqslant 2$，D_4：$2x^2+y^2\leqslant 2$，记 $D=D_3\cap D_4$．由格林公式，有

$$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y=\iint_{D_i}\left[(2-x^2)-\left(1+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_i}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于

$$I_1=\iint_{D_1}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint_{D}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$<\iint_{D_4}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_4,$$

$$I_3=\iint_{D_3}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3-D}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$<\iint_{D}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I_4,$$

$$I_2=\iint_{D_2}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_4}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3-D_4}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$<\iint_{D_4}\left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_4,$$

所以

$$\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=I_4.$$

5．设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=$________．

解　由题意 $f(0)=1$．方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 两边同时对 x 求导数得

$$y'-1=\mathrm{e}^{x(1-y)}\cdot(1-y-xy'),$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式得 $f'(0)=1$．又因为

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}-0}=f'(0)=1\,.$$

6．已知 $y_1=\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}$，$y_2=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$，$y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解为 $y=$________．

解 由已知 $y_1-y_3=\mathrm{e}^{3x}$，$y_2-y_3=\mathrm{e}^{x}$ 是对应的二阶常系数线性齐次微分方程的两个线性无关的特解，从而其通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}$．则所求的非齐次方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$．

7．设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________．

解
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}=1\cdot\frac{1}{\cos t}=\frac{1}{\cos t}\,,$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$．

8．$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________．

解
$$\text{原式}=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}(1+x)^{-1}=-\left.\frac{\ln x}{1+x}\right|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\left[\ln x-\ln(1+x)\right]_1^{+\infty}=\left.\ln\frac{x}{1+x}\right|_1^{+\infty}=\ln 2\,.$$

9．计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$．

解 由已知有 $f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$，且 $f(1)=1$．

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\sqrt{x}=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}f'(x)\mathrm{d}x$$
$$=-2\int_0^1\sqrt{x}\frac{\ln(x+1)}{x}\mathrm{d}x=-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=-4\int_0^1\ln(x+1)\mathrm{d}\sqrt{x}$$
$$=-4\sqrt{x}\ln(x+1)\Big|_0^1+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x=-4\ln 2+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x\,,$$

令 $\sqrt{x}=t$，则

$$\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2(t-\arctan t)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2},$$

因此$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=8-2\pi-4\ln 2$.

10．设数列a_n满足条件：$a_0=3,\ a_1=1,\ a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geqslant 2)$．$S(x)$是幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数.（1）证明：$S''(x)-S(x)=0$；（2）求$S(x)$的表达式.

解　（1）因为$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，因此

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

又因为$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geqslant 2)$，即$a_{n-2}=n(n-1)a_n$，故有

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x),$$

即$S''(x)-S(x)=0$，命题得证.

（2）$S''(x)-S(x)=0$为二阶常系数线性微分方程，对应的特征方程为$r^2=1$，则微分方程的通解为$S(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$．又$a_0=3,\ a_1=1$，则

$$S'(0)=a_0=C_1+C_2=3,\quad S''(0)=a_1=C_1-C_2=1,$$

解得$C_1=2,\ C_2=1$，即$S(x)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$.

11．求函数$f(x,y)=\left(y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$的极值.

解
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(x^2+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\left(1+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y},$$

由$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$得驻点$\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$和$\left(1,-\frac{4}{3}\right)$. 而

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(2x+2x^2+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(2+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(x^2+1+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}.$$

在$\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$处，

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\left(-1,-\frac{2}{3}\right)}=-\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},\quad B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{\left(-1,-\frac{2}{3}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},\quad C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\left(-1,-\frac{2}{3}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},$$

从而 $AC-B^2<0$，故 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 不是极值点.

在 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 处，

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\left(1,-\frac{4}{3}\right)}=3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},\quad B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{\left(1,-\frac{4}{3}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},\quad C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\left(1,-\frac{4}{3}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},$$

从而 $AC-B^2=2\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}>0$，且 $A>0$，故点 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 是极小值点，极小值为 $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

12．设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

（2）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证 （1）由于 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f(0)=0$．构造辅助函数 $\phi(x)=f(x)-x$，显然 $\phi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\phi(0)=\phi(1)=0$，由罗尔定理可知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\phi'(\xi)=0$，从而有 $f'(\xi)=1$.

（2）构造辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)-1]$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导．又因为 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f'(x)$ 为偶函数，从而根据（1）可知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=f'(-\xi)=1,$$

故有 $F(-\xi)=F(\xi)=0$，由罗尔定理可知，存在点 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得 $F'(\eta)=0$．又因为

$$F'(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)-1]+\mathrm{e}^x f''(x)=\mathrm{e}^x[f''(x)+f'(x)-1],$$

因此有 $\mathrm{e}^\eta[f''(\eta)+f'(\eta)-1]=0$，故有 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

13．设直线 L 过 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的立体为 Ω．（Ⅰ）求曲面 Σ 的方程；（Ⅱ）求 Ω 的形心坐标.

解 （Ⅰ）直线 L 的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$，参数方程为

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=-t\\ z=-t\end{cases}\quad（t\text{ 为参数}）.$$

设 (x,y,z) 为曲面 Σ 上的任一点，则

$$\begin{cases}x^2+y^2=(1+t)^2+t^2,\\ z=-t\end{cases}$$

消去参数 t，得曲面 Σ 的方程为 $x^2+y^2=2z^2-2z+1$.

（Ⅱ）$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1,\ 0\leqslant z\leqslant 2\}$，记 Ω 的形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则

$$\overline{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v},\quad \overline{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v},\quad \overline{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}.$$

由对称性，所以 $\overline{x}=0$ ，$\overline{y}=0$. 记 $D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1\}$ ，“先二后一”计算三重积分，

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2 z(2z^2-2z+1)\mathrm{d}z=\frac{14}{3}\pi\,,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)\mathrm{d}z=\frac{10}{3}\pi\,,$$

所以 $\overline{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\dfrac{7}{5}$. 因此 Ω 的形心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

2014 年考研数学一高等数学考题

1．下列曲线有渐近线的是（　　）．

（A）$y=x+\sin x$；　　（B）$y=x^2+\sin x$；

（C）$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$；　　（D）$y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$．

解　正确答案为选项（C）．由于

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0,$$

所以 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y=x$．

2．设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $(0,1)$ 上（　　）．

（A）当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$；

（B）当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$；

（C）当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$；

（D）当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$．

解　正确答案为选项（D）．本题考查了曲线凹凸性的概念．当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，曲线 $f(x)$ 为凹的，如图 1 所示．

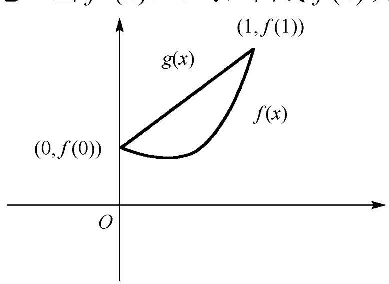


图 1

$g(x)$ 为连接点 $(0,f(0))$ 和 $(1,f(1))$ 的直线段，根据凹凸性的定义，显然有 $f(x)\leqslant g(x)$．

本题也可以利用辅助函数方法．构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x,$$

由于

$$F(0)=F(1)=0,\quad F''(x)=f''(x),$$

因此当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是凹的，因此当 $x\in[0,1]$ 时，有 $F(x)\leqslant F(0)=F(1)=0$，从而有 $f(x)\leqslant g(x)$．

3．设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x=$（　　）．

（A）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x-1} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

（B）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\mathrm{d}y$；

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$；

（D）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

解　如图 2 所示，积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1,-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1-y\}$，因此

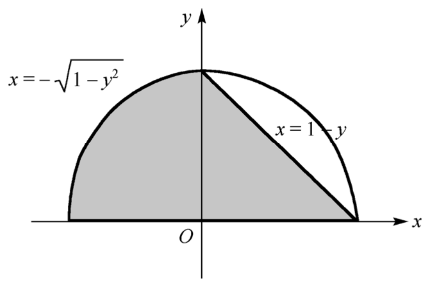


图 2

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r,$$

故选（D）.

4．若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\mathrm{d}x=\min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x\right\}$，则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$（　　）.

（A）$2\sin x$；　　（B）$2\cos x$；　　（C）$2\pi\sin x$；　　（D）$2\pi\cos x$.

解　正确答案为选项（A）.

$$\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^3,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x=\pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin x\mathrm{d}x=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=2\pi .$$

所以 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^3+\pi(a^2+b^2)-4\pi b$.

本题相当于求函数 a^2+b^2-4b 的极小值，显然可以知道当 $a=0$，$b=2$ 时取得最小值.

5．曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为________.

解　$z'_x=2x(1-\sin y)-y^2\cos x$，$z'_y=-x^2\cos y+2y(1-\sin x)$.

从而 $z'_x(1,0,1)=2$，$z'_y(1,0,1)=-1$，它们即为曲面在点 $(1,0,1)$ 处的法向量的三个分量，所以在该点处的切平面方程为

$$2\cdot(x-1)+(-1)(y-0)+(-1)(z-1)=0，即 2x-y-z=1 .$$

6．设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则 $f(7)=$________.

解　由题意

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=x^2-2x+C,\quad x\in[0,2],$$

又因为 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f(0)=0$，从而 $C=0$，即 $f(x)=x^2-2x$．又因为 $f(x)$ 是周期为 4，因此

$$f(7)=f(-1+8)=f(-1)=-f(1)=-(1-2)=1\,.$$

7．微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 的解为 $y=$________.

解 方程化为 $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，这是一个齐次方程.

令 $u=\dfrac{y}{x}$，$y=ux$，方程变为

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

解得 $\ln u-1=Cx$，将 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 代入得 $C=2$，从而 $y=x\mathrm{e}^{2x+1}$.

8．设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$________.

解 设平面 Σ：$y+z=0$，取上侧，其法向量为 $(0,1,1)$，故单位法向量为 $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

由斯托克斯公式 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$ 可以得

$$\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z & 0 & y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1+0^2+(-1)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\,.$$

9．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

解 根据等价无穷小量替换公式，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x}.$$

记 $f(t)=t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t$，当 $t\to+\infty$ 时，根据泰勒展开，有

$$f(t)=t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t=t^2\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]-t=\frac{1}{2}+o(1)\,,$$

因此，根据广义积分的几何意义，有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt=\infty,$$

结合洛必达法则，有

$$原极限=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\right]=\frac{1}{2}.$$

注 本题在使用洛必达法则时，应该首先验证该题是否适用洛必达法则的条件，即是否属于$\dfrac{\infty}{\infty}$类型.

10．设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

解　方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 两边同时对 x 求导数，得

$$3y^2\cdot y'+y^2+2xy\cdot y'+2xy+x^2\cdot y'=0,$$

令 $y'=0$，解得 $y=-2x$ 或 $y=0$（不适合原方程，舍去）. 将 $y=-2x$ 代入原方程解得 $x=1$，$y=-2$．由方程 $3y^2\cdot y'+y^2+2xy\cdot y'+2xy+x^2\cdot y'=0$ 解得

$$y'=-\frac{y^2+2xy}{3y^2+2xy+x^2},$$

因此

$$y''=-\frac{(2y\cdot y'+2y+2x\cdot y')(3y^2+2xy+x^2)-(y^2+2xy)(6y\cdot y'+2y+2xy'+2x)}{(3y^2+2xy+x^2)^2},$$

将 $y'=0$，$x=1$，$y=-2$ 代入 y'' 得 $y''(1)=\dfrac{4}{9}>0$，因此函数在 $x=1$ 处取得极小值，极小值为 -2 .

11．设 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x},$$

且 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

解　由题意

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(e^x\cos y)e^x(-\sin y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y+f'(e^x\cos y)e^x(-\cos y),$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}=(4z+e^x\cos y)e^{2x},$$

整理得

$$f''(e^x\cos y)=4z+e^x\cos y=4f(e^x\cos y)+e^x\cos y,$$

即 $f''(u)-4f(u)=u$，即二阶常系数线性非齐次微分方程 $y''-4y=u$，解得

$$y = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{u}{4},$$

由 $f(0)=0,\ f'(0)=0$，解得 $C_1 = \frac{1}{16}$， $C_2 = -\frac{1}{16}$，因此 $f(u)$ 的表达式为

$$y = f(u) = \frac{1}{16}e^{2u} - \frac{1}{16}e^{-2u} - \frac{u}{4}.$$

12．设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leqslant 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-1)^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解　设 $\Sigma_1 : z = 1\ \ (x^2 + y^2 \leqslant 1)$ 取下侧，Σ 与 Σ_1 所包围的空间区域 $\Omega : x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$，$\Sigma_1$ 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy} : x^2 + y^2 \leqslant 1$.

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} (x-1)^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-1)^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iiint_{\Omega} [3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{aligned}$$

由于

$$\iint_{\Sigma_1} (x-1)^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-1)^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,\quad \iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,\quad \iiint_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} I &= -\iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 7)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_{r^2}^1 (3r^2 + 7)\mathrm{d}z \\ &= -4\pi. \end{aligned}$$

13．设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$， $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$， $\cos a_n - a_n = \cos b_n$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

（I）证明： $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$；　　（II）证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

证　（I）由 $\cos a_n - a_n = \cos b_n$，得 $\cos a_n - \cos b_n = a_n$， $2\sin\frac{b_n - a_n}{2}\sin\frac{b_n + a_n}{2} = a_n$，结合条件，得 $b_n - a_n > 0$，即 $0 < a_n < b_n$（$n = 1,2,\cdots$）. 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛得 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$，从而 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

（II）因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos b_n}{b_n^2} \cdot \frac{a_n}{1-\cos b_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1-\cos b_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n + 1 - \cos a_n} = \frac{1}{2},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

2015 年考研数学一高等数学考题

数学一试题

1．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如图 3 所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为（　　）.

（A）0；　　（B）1；

（C）2；　　（D）3．

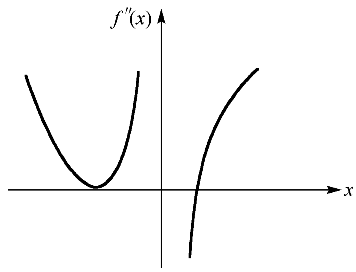


图 3

解　$y=f(x)$ 的拐点可能为二阶导数 $f''(x)$ 为零的点和二阶导数 $f''(x)$ 不存在的点，从图 3 可以看到，$f''(x)$ 有两个零点和一个不存在的点．拐点两侧的 $f''(x)$ 符号相反，从图 3 可以看到，只有两个点满足，因此拐点有两个．故选（C）.

2．设 $y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=c\mathrm{e}^{x}$ 的一个特解，则（　　）.

（A）$a=-3$，$b=2$，$c=-1$；　　（B）$a=3$，$b=2$，$c=-1$；

（C）$a=-3$，$b=2$，$c=1$；　　（D）$a=3$，$b=2$，$c=1$．

解　由题设条件可以得到齐次线性方程的特征根为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，特征方程为 $(\lambda-2)(\lambda-1)=0$，即 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，所以 $a=-3$，$b=2$．

将特解 $y^*=x\mathrm{e}^x$ 代入方程，可以得到 $c=-1$．选（A）.

3．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的（　　）.

（A）收敛点，收敛点；　　（B）收敛点，发散点；

（C）发散点，收敛点；　　（D）发散点，发散点．

解　由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，利用排除法可得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ 的收敛半径 $R=1$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nt^n$ 的收敛半径 $R=1$．当 $x=\sqrt{3}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 绝对收敛；当 $x=3$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 发散．

4．设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）.

（A）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$；

（B）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$；

（C）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$；

（D）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

解　如图 4 所示，在极坐标系下二重积分的积分区域为

$$D=\left\{(r,\theta)\mid\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right\},$$

则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

故选（B）.

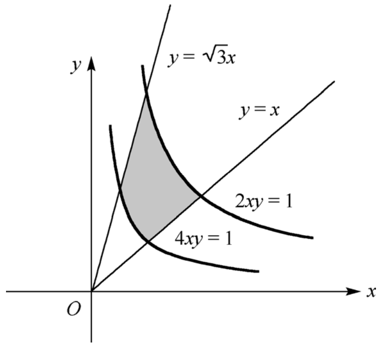


图 4

5．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$________.

解　由洛必达法则，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

6．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x$________.

解　结合积分的对称性，有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.$$

7．若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$________.

解　令 $x=0$， $y=1$，得 $z=0$.

方程两边求全微分，有 $\mathrm{e}^z\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}x=0$，

将 $x=0$， $y=1$， $z=0$ 代入，得

$$\mathrm{d}z|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x.$$

8．设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

解　由轮换对称性，有 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

从而 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}z\mathrm{d}z=\dfrac{1}{4}$.

9．设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$， $g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a、b、k 的值.

解　于 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$， $\sin x=x-\dfrac{x^2}{6}+o(x^3)$，

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x=x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+bx^2+o(x^3)$$

$$=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)，$$

由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，所以 $\begin{cases}1+a=0\\ b-\dfrac{a}{2}=0\\ k=\dfrac{a}{3}\end{cases}$，解得

$$a=-1，\ b=-\frac{1}{2}，\ k=-\frac{1}{3}.$$

10．设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成的区域 D 的面积为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)，$$

该切线与 x 轴的交点为 $\left(x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)},0\right)$．由已知有

$$\frac{1}{2}\frac{|f(x_0)|}{f'(x_0)}\cdot|f(x_0)|=4，$$

从而 $y=f(x)$ 满足方程 $y'=\dfrac{1}{8}y^2$，解得 $y=-\dfrac{8}{8C+x}$．因为 $f(0)=2$，所以，$C=-\dfrac{1}{2}$，因此 $f(x)=\dfrac{8}{4-x}$.

11．已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解　因为函数函数在每一点沿梯度方向的方向导数最大，且最大方向导数是该点梯度向量的长度，而

$$\mathbf{grad}\,f(x,y)=(1+y,1+x)，$$

$$|\mathbf{grad}\,f(x,y)|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}，$$

因此本题实质上就是求函数 $\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ 在条件 $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$，则

$$\begin{cases} F'_x = 2(1+x) + \lambda(2x+y) = 0 \\ F'_y = 2(1+y) + \lambda(2y+x) = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0 \end{cases},$$

解得

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

又$\left|\mathbf{grad}\, f(1,1)\right| = 2\sqrt{2}$，$\left|\mathbf{grad}\, f(0,0)\right| = 0$，$\left|\mathbf{grad}\, f(2,-1)\right| = 3$，$\left|\mathbf{grad}\, f(-1,2)\right| = 3$，所以$f(x,y)$在曲线$C$上的最大方向导数为 3.

12.（I）设函数$u(x)$，$v(x)$可导，利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

（II）设函数$u_1(x)$，$u_2(x)$，$\cdots$，$u_n(x)$可导，写出$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$的求导公式.

解　（I）记$y = u(x)v(x)$，则

$$\begin{aligned} \Delta y &= u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) \\ &= u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) \\ &= v(x+\Delta x)[u(x+\Delta x) - u(x)] + u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)] \\ &= v(x+\Delta x)\cdot \Delta u + u(x)\cdot \Delta v, \end{aligned}$$

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

因为

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}, \end{aligned}$$

又由于函数$u(x)$，$v(x)$可导，所以$u(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$，$v(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$. 再由$v(x)$可导得$v(x)$连续，所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x)$. 因此

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

（II）$f'(x) = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$.

13. 已知曲线L的方程为$\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x \end{cases}$，起点为$A(0,\sqrt{2},0)$，终点为$B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分

$$I = \int_L (y+z)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2 + y)\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\mathrm{d}z.$$

解　由于L在xOy平面上的投影$L_1: x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1\ \ (x \geqslant 0)$，起点为$(0,\sqrt{2})$，终点为$(0,-\sqrt{2})$，

参数方程为$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \end{cases}$，从而曲线$L$的参数方程为$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \\ z=\cos t \end{cases}$，其起点和终点的参数分别为$\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}$. 将$L$的参数方程代入$I$得

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[(\sqrt{2}\sin t+\cos t)(-\sin t)+(\cos^2 t-\cos^2 t+\sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}\cos t+(\cos^2 t+2\sin^2 t)(-\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(-\sqrt{2}\sin^2 t+\sin t\cos t-\sin t-\sin^3 t)\mathrm{d}t=-\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

2016 年考研数学一高等数学考题

1．若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）.

（A） $a<1$ 且 $b>1$；　　（B） $a>1$ 且 $b>1$；

（C） $a<1$ 且 $a+b>1$；　　（D） $a>1$ 且 $a+b>1$.

解　将原式分解为两部分考虑，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x,$$

第一部分为瑕积分， $x=0$ 为瑕点，第二部分为无穷限的反常积分，根据反常积分的性质，可得（C）选项正确.

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2(x-1), x<1 \\ \ln x, x\geqslant 1 \end{cases}$，　则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　）.

（A） $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & x<1 \\ x(\ln x-1) & x\geqslant 1 \end{cases}$；　　（B） $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & x<1 \\ x(\ln x+1)-1 & x\geqslant 1 \end{cases}$；

（C） $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & x<1 \\ x(\ln x+1) & x\geqslant 1 \end{cases}$；　　（D） $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & x<1 \\ x(\ln x-1)+1 & x\geqslant 1 \end{cases}$.

解　分别求分段区间的原函数，再利用间断点的连续性可知

$$F(x)=\begin{cases} (x-1)^2+C_1 & x<1 \\ x(\ln x-1)+C_2 & x\geqslant 1 \end{cases},$$

在 $x=1$ 这一点处连续，则 $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2+C_1 & x<1 \\ x(\ln x-1)+C_1+1 & x\geqslant 1 \end{cases}$，符合题意的正确选项为（D）.

3．若 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$， $y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$（　　）.

（A） $3x(1+x^2)$；　　（B） $-3x(1+x^2)$；

（C） $\frac{x}{1+x^2}$；　　（D） $-\frac{x}{1+x^2}$.

解　由已知 $y_2-y_1=2\sqrt{1+x^2}$ 是一阶齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的解．而 $(y_2-y_1)'=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$，代入 $y'+p(x)y=0$，解得

$$p(x)=-\frac{x}{1+x^2}.$$

又因为 $y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是 $y'+p(x)=q(x)$ 的特解．求导得

$$y_2'=4x(1+x^2)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

代入方程 $y'+p(x)=q(x)$，解得 $q(x)=3x(1+x^2)$．因此正确选项为（A）.

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots \end{cases}$，则（　　）.

（A） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点；

（B） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点；

（C） $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导；

（D） $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解　由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．又因为

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(0\right)}{\frac{1}{n}}=1,$$

对任意的 n 成立，于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，答案选（D）.

5．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln\left(1+t\sin t\right)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$________.

解　原式为：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln\left(1+t\sin t\right)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln\left(1+x\sin x\right)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

6．向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)\vec{i}+xy\vec{j}+z\vec{k}$ 的旋度为 $\mathrm{rot}A=$________.

解　根据旋度的计算式

$$P=(x+y+z),\quad Q=xy,\quad R=z,$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)=0,\quad \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)=1,\quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=y-1,$$

于是 $\mathrm{rot}A=(0,1,y-1)$.

7．设函数 $f(u,v)$ 可微， $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $\mathrm{d}z(0,1)=$________.

解　$z(0,1)=1$，方程两边对 x 求导，得到

$$z+(x+1)z_x'=2xf(x-z,y)+x^2[(1-z_x')f_1'],$$

方程两边对 y 求导，得到

$$(x+1)z_y'-2y=x^2[(-z_y')f_1'+f_2'],$$

代入值，可得 $z_x'(0,1)=-1$， $z_y'(0,1)=2$.

8．设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$________.

解 根据泰勒公式，有

$$f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x[1-ax^2+o(x^2)]=\left(a-\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3),$$

因此 $f'''(0)=1\quad a-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，所以 $a=\dfrac{1}{2}$.

9．已知平面区域 D= $D=\left\{(r,\theta)\mid 2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 化为累次积分，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta\mathrm{d}r=5\pi+\frac{32}{3}$.

10．设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

（1）证明反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

（2）若 $y(0)=1$，$y'(0)=1$，求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解 （1）方程 $y''+2y'+ky=0$ 的特征方程为 $r^2+2r+k=0$．判别式 $\Delta=4-4k>0$，从而特征方程有两个不同的实根 r_1、r_2，且由求根公式 $r_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4k}}{2}$ 知两个根均小于零．从而微分方程的特解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x})\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{C_1}{r_1}\mathrm{e}^{r_1x}+\frac{C_2}{r_2}\mathrm{e}^{r_2x}\right)\right|_0^{+\infty}=-\frac{C_1}{r_1}-\frac{C_2}{r_2},$$

从而反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

（2）由 $y(0)=1$，$y'(0)=1$，得 $C_1+C_2=1$，$C_1r_1+C_2r_2=1$．再由根与系数的关系得 $r_1+r_2=-2$，$r_1r_2=k$．从而求得

$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=-\frac{C_1}{r_1}-\frac{C_2}{r_2}=-\frac{C_1r_1+C_2r_2}{r_1r_2}=\frac{3}{k}.$$

11．设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)l^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\displaystyle\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$ 的最小值.

解 根据已知条件，两边对 x 的积分得

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y},$$

故

$$f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+C(y).$$

又 $f(0,y)=y+1$，从而 $C(y)=y+1$，因此 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+y+1$.

又因为二阶混合偏导数相等，满足积分与路径无关的条件，曲线积分化简为原函数在起点和终点的函数值的差，于是

$$I(t)=f(x,y)\big|_{(0,0)}^{(1,t)}=\mathrm{e}^{2-t}+t.$$

计算 $I'(t)=-\mathrm{e}^{2-t}+1$， $I'(2)=0$，所以，函数的最小值即为唯一的驻点处所取的值，为 $I(2)=3$.

12．设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　根据高斯公式，得

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}(2x+1)\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{1-\frac{y}{2}}\mathrm{d}z\int_0^{1-z-\frac{y}{2}}(2x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

13．已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$， $0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明：

（I）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；（II） $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

解　（I）由于

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n|&=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi_1)|\cdot|x_n-x_{n-1}|\leqslant\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|\\&=\frac{1}{2}|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|=\frac{1}{2}|f'(\xi_2)|\cdot|x_{n-1}-x_{n-2}|\\&\leqslant\frac{1}{2^2}|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqslant\ldots\frac{1}{2^n}|x_1-x_0|,\end{aligned}$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

（II）由绝对收敛必然收敛可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛，则其前 n 项和数列极限存在，即

$$S_n=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_{n+1}-x_n)=x_{n+1}-x_1,$$

而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，不妨假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由 $x_{n+1}=f(x_n)$，两边取极限，得 $a=f(a)$，故 a 是 $f(x)-x$ 的零点．令 $F(x)=f(x)-x$，由于 $F'(x)=f'(x)-1<0$，因此 $F(x)$ 为单调减函数．从而

$$F(0)=f(0)-0=1>0，\quad F(2)=f(2)-2=f(2)-f(0)-1，$$

由拉格朗日中值定理得，

$$F(2)=f'(\xi)(2-0)-1=2f'(\xi)-1，\quad 0<\xi<2 .$$

由于 $0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$，则 $F(2)<0$． 由 $F(2)<0$ 及 $F(0)>0$，得 $F(x)=f(x)-x$ 在 $(0,2)$ 上有唯一零点．则 $0<a<2$，即 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

2017 年考研数学一高等数学考题

1．若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax} & x>0\\ b & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）.

（A）$ab=\dfrac{1}{2}$；　（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$；　（C）$ab=0$；　（D）$ab=2$.

解　因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x}{ax}=\frac{1}{2a}，\quad \lim_{x\to0^-}f(x)=b，$$

所以 $\dfrac{1}{2a}=b$，故 $ab=\dfrac{1}{2}$．选（A）.

2．设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$f(1)>f(-1)$；　（B）$f(1)<f(-1)$；

（C）$|f(1)|>|f(-1)|$；　（D）$|f(1)|<|f(-1)|$.

解　因为 $f(x)f'(x)=\left[\dfrac{f^2(x)}{2}\right]'>0$，所以 $f^2(x)$ 单调增加，故 $f^2(1)>f^2(-1)$．选（C）.

3．函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿着向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向导数为（　　）.

（A）12；　（B）6；　（C）4；　（D）2.

解　正确答案为（D）．向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{3}$，$\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$.

$$f'_x(x,y,z)=2xy，\quad f'_y(x,y,z)=x^2，\quad f'_z(x,y,z)=2z，$$

从而方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{(1,2,0)}=f'_x(1,2,0)\cos\alpha+f'_y(1,2,0)\cos\beta+f'_z(1,2,0)\cos\gamma=2.$$

4．甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处．图 5 中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$（单位：m/s），三块阴影部分面积的数值依次为 10、20、3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位：s），则（　　）.

（A）$t_0=10$　（B）$15<t_0<20$

（C）$t_0=25$　（D）$t_0>25$

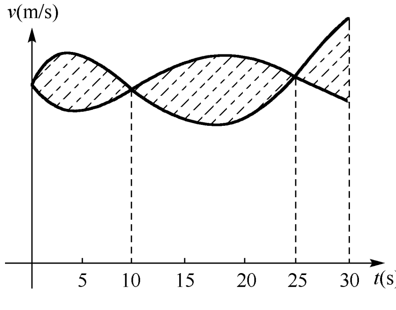


图 5

解　利用速度及定积分的物理意义可以得出选（C）.

5．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$________.

解　正确答案为 0．因为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$，没有三次项，故 $f^{(3)}(0)=0$．

6．微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$________．

解　因为特征方程为 $r^2+2r+3=0$，特征根为 $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$，从而通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)\,.$$

7．若曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{x\mathrm{d}x-ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$________．

解　因为 $P=\dfrac{x}{x^2+y^2-1}$，$Q=-\dfrac{ay}{x^2+y^2-1}$．由于积分与路径无关，所以 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$．所以 $a=-1$．

8．幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数 $s(x)=$________．

解　因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-x)^{n-1}=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n\right)'=-\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}\,.$$

$$s(x)=\frac{1}{(1+x)^2}\,.$$

9．设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$．

解　由题意

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_1'\cdot\mathrm{e}^x-f_2'\cdot\sin x\,,\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(f_{11}''\cdot\mathrm{e}^x-f_{12}''\cdot\sin x)\mathrm{e}^x+f_1'\cdot\mathrm{e}^x-(f_{21}''\cdot\mathrm{e}^x-f_{22}''\cdot\sin x)\sin x-f_2'\cdot\cos x\,,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)\,.$$

10．求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$．

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\\&=\int_0^1x\ln(1+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}(x^2)\\&=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}.$$

11．已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.

解　方程两边关于 x 求导，得

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0,\tag{1}$$

令 $y'=0$，得 $x=\pm1$.当 $x=1$ 时，$y=1$．当 $x=-1$ 时，$y=0$．对式（1）两边再关于 x 求导，得

$$6x+6y(y')^2+3y^2\cdot y''+3y''=0,\tag{2}$$

在 $x=1$ 点，$y'=0$，代入式（2）式，有 $y''\big|_{(1,1)}=-\dfrac{3}{2}<0$．从而 $x=1$ 为极大值点，极大值为 1. 在 $x=-1$ 点，$y'=0$，代入式（2）式，有 $y''\big|_{(1,1)}=6>0$．从而 $x=-1$ 为极小值点，极小值为 0.

12．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$．证明：

（I）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

（II）方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

解　（I）由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 及极限的保号性可知，存在 $\delta>0$，当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}<0$，因此存在 $c\in(0,\delta)$，使得 $\dfrac{f(c)}{c}<0$，由 $c>0$，有 $f(c)<0$；再由已知条件及 $f(1)>0$，利用零点定理可以得到，存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$．因此方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根.

（II）令 $F(x)=f(x)f'(x)$，则

$$F'(x)=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2.$$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 得 $f(0)=0$，$f'(0)<0$．再由拉格朗日中值定理有，存在 $\eta\in(0,1)$，使得

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0},$$

注意到条件 $f(1)>0$，从而 $f'(\eta)>0$．在区间 $[0,\eta]$ 上由零点定理，易得存在 $\gamma\in(0,\eta)$，满足 $f'(\gamma)=0$．而 $F(0)=f(0)f'(0)=0$，结合（I）有 $F(\xi)=f(\xi)f'(\xi)=0$，$F(\gamma)=f(\gamma)f'(\gamma)=0$，从而由罗尔定理可以证得方程 $F'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点.

13．设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任意一点处的密度为 $\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，记圆锥面与柱面的交线为 C；

（I）求 C 在平面 xOy 上的投影曲线的方程；（II）求 S 的质量 M.

解　（I）由方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z^2=2x$ 消去变量 z，得 $x^2+y^2=2x$，整理有 $(x-1)^2+y^2=1$. 从而 C 在平面 xOy 上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}.$$

（II）由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，得

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}，\quad z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}，\quad \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{2}\,.$$

因此

$$\begin{aligned}
M&=\iint_{\Sigma}\mu(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S\\
&=\iint_{\Sigma}9\sqrt{x^2+y^2+x^2+y^2}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=18\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r\\
&=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\\
&=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=96\times\frac{2}{3}=64\,.
\end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] 吉米多维奇. 数学分析习题集. 北京：人民教育出版社, 1978

[2] A. Jeffrey. Advanced Engineering Mathematics. San Diego: Harcourt/Academic Press, 2002

[3] H. B. Wilson, L. H. Turcotte, D. Halpern. Advanced Mathematics and Mechanics Applications Using (3th Edition) . London: Chapman and Hall/CRC, 2003

[4] 金路, 童裕孙, 於崇华, 张万国. 高等数学上册（第 3 版）. 北京: 高等教育出版社, 2008

[5] 金路, 童裕孙, 於崇华, 张万国. 高等数学下册（第 3 版）. 北京: 高等教育出版社, 2008

[6] 李忠, 周建莹. 高等数学上册（第 2 版）. 北京: 北京大学出版社, 2009

[7] 李忠, 周建莹. 高等数学下册（第 2 版）. 北京: 北京大学出版社, 2009

[8] 华东师范大学数学系. 数学分析上册（第 4 版）. 北京: 高等教育出版社, 2010

[9] 华东师范大学数学系. 数学分析下册（第 4 版）. 北京: 高等教育出版社, 2010

[10] R. Larson, B. H. Edwards. Calculus (9th Edition). Belmont: Brooks/Cole, 2010

[11] 吴赣昌. 高等数学上册（第 4 版）. 北京: 中国人民大学出版社, 2011

[12] 吴赣昌. 高等数学下册（第 4 版）. 北京: 中国人民大学出版社, 2011

[13] E. Kreyszig, H. Kreyszig, E. J. Norminton. Advanced Engineering Mathematics (10th Edition). Hoboken :John Wiley & Sons, 2011

[14] 同济大学数学系. 高等数学上册（第 7 版）. 北京: 高等教育出版社, 2014

[15] 同济大学数学系. 高等数学下册（第 7 版）. 北京: 高等教育出版社, 2014

[16] 教育部考试中心. 全国硕士研究生入学统一考试数学试题, 1990-2015

[17] 刘强, 孙激流. 微积分同步练习与模拟试题. 北京: 清华大学出版社, 2015

[18] 刘强, 贾尚晖. 微积分复习指导与深化训练. 北京: 电子工业出版社, 2016

[19] 刘强, 袁安锋, 孙激流. 高等数学（上）同步练习与模拟试题. 北京: 清华大学出版社, 2016

[20] 刘强, 袁安锋, 孙激流. 高等数学（下）同步练习与模拟试题. 北京: 清华大学出版社, 2017